Sammlung Göschen



Stereometrie

Von

Prof. Dr. Robert Glaser

Mit 51 Figuren



97

Sammlung Göschen

Stereometrie

Von

Professor Dr. Robert Glaser
in Stuttgart

Dritte, verbesserte Auflage

Neudruck

Mit 81 Figuren



Berlin und Leipzig
Vereinigung wissenschaftlicher Verleger
Walter de Gruyter & Co.
vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.
1920

Druck von
C. G. Röder G. m. b. H., Leipzig.
817620.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Punkte, gerade Linien und Ebenen im Raume.

Zweiter Abschnitt.

Flächen und Körper.

Dritter Abschnitt.

Berechnungen von Körpern und Flächen.

Erster Abschnitt.

Punkte, gerade Linien und Ebenen im Raume.

A. Einleitung.

1. Die Geometrie beschäftigt sich mit der Aufstellung und Untersuchung der Eigenschaften von Körpern, Flächen, Linien und Punkten; dabei werden die einzelnen Gebilde für sich und in Hinsicht auf ihre gegenseitigen Beziehungen zueinander betrachtet.

Bei allen diesen Gebilden kommt nur ihre räumliche Ausdehnung und Gestalt in Betracht.

Was im gewöhnlichen Leben ein Punkt heißt, ist kein solcher, sondern ein Körper oder eine Fläche von sehr geringer Ausdehnung.

Der mathematische Punkt dagegen besitzt keinerlei Ausdehnung. Man denkt sich den Punkt als die Grenze, der sich ein Körper bei unbegrenzter Verkleinerung nähert, als sogenannten unendlich kleinen Körper oder unendlich kleine Fläche. Man bezeichnet dann den Punkt als eine ausdehnungslose Stelle im Raume.

Einer Linie schreibt man nur eine Ausdehnung, eine Dimension zu; man spricht bei ihr nur von einer Länge. Auf einer Linie sind unbegrenzt viele Punkte denkbar; sie ist der Träger unendlich vieler Punkte. Man stellt so den

Grundsatz auf: In der Linie sind einfach unendlich viele Punkte enthalten.

Der mathematischen Fläche aber schreibt man zwei Ausdehnungen zu; man spricht bei ihr von Länge und Breite; auf einer Fläche sind unbegrenzt viele Linien denkbar. Man kann sich auf ihr unendlich viele Linien, die dicht nebeneinander liegen und keine oder wenigstens nicht unendlich viele Punkte miteinander gemeinschaftlich haben und die ganze Fläche ausfüllen, denken. Man stellt so den Grundsatz auf: In der mathematischen Fläche sind unendlich mal unendlich viele Punkte enthalten; sie enthält zweifach unendlich viele Punkte.

Dem mathematischen Körper schreibt man drei Ausdehnungen, drei Dimensionen zu; man spricht bei ihm wohl von Länge, Breite und Höhe. In einem Körper kann man sich Flächen in unbegrenzter Anzahl denken. Man kann sich vorstellen, daß in einem Körper unendlich viele Flächen, die dicht nebeneinander liegen und nicht zusammenfallen, enthalten sind. Man kommt so zu dem Grundsatz: Im mathematischen Körper sind unendlich mal unendlich mal unendlich viele Punkte enthalten; er enthält dreifach unendlich viele Punkte.

Alle Körper befinden sich im Raume; jeder Körper ist ein durch Flächen begrenzter Teil des Raumes. Flächen können begrenzt sein (z. B. der Kreis) oder nicht (z. B. die Oberfläche der Kugel). Die Grenzen von Flächen sind Linien. Linien sind begrenzt (z. B. die Strecke) oder nicht (z. B. die Kreislinie); die Grenzen von Linien sind Punkte.

2. Die Planimetrie ist derjenige Teil der Geometrie welcher sich nur mit Gebilden beschäftigt, die in derselben, Ebene liegen. Die Stereometrie dagegen behandelt neben solchen ebenen Gebilden insbesondere die räumlichen.

Die Gebilde, welche in der Stereometrie zunächst in Betracht kommen, sind: der Punkt, die gerade Linie oder kurz die Gerade und die ebene Fläche, kurz die Ebene.

Der Begriff des Punktes ist schon oben festgestellt worden.

3. Was die Linien und Flächen anbelangt, so sind hier gewisse Unterschiede aufgestellt worden. Man unterscheidet zwischen geraden Linien und krummen (gekrümmten) Linien oder Kurven, zwischen ebenen Flächen und gekrümmten Flächen.

Ein gespannter Faden, den man sich sehr dünn (unendlich dünn) denken kann, ruft in uns die Vorstellung, den Begriff der geraden Strecke hervor.

Die Eigenschaften eines gespannten Fadens sind:

a) Er macht an jeder seiner Stellen auf unsere Gesichts- und Tastorgane denselben Eindruck und dies ist der Fall, ob der Faden kurz oder lang ist; auch kommt es nicht auf den Ort an, wo der Faden gespannt ist.

b) Zwischen zwei feste Punkte A und B des Raumes läßt sich nur ein Faden von ganz bestimmter, kürzester Länge spannen.

c) Läßt man den Punkt A fest und nimmt man statt B einen zwischen A und B liegenden Punkt C, so fällt der gespannte Faden AC mit dem ersten zusammen.

Man kommt so zur Aufstellung folgender Grundsätze (Postulate, Axiome):

a) Eine Strecke ist durch zwei Punkte A und B, ihre Endpunkte, vollständig bestimmt; es gibt nur eine Strecke, welche die Punkte A und B miteinander verbindet. Die Strecke AB heißt die Entfernung, der Abstand der beiden Punkte A und B.

b) Eine Strecke AB kann sowohl über A hinaus, als auch über B hinaus beliebig verlängert werden,

so daß immer neue Strecken entstehen, denen A und B angehören.

c) Es gibt keinen Punkt, der beiden Verlängerungen einer Strecke zugleich angehört.

(Bemerkung. Durch diesen Grundsatz wird die sogenannte elliptische Geometrie ausgeschlossen, in der die Gerade eine endliche in sich geschlossene Linie ist.)

Unter einer geraden Linie, kurz unter einer Geraden nun versteht man die Gesamtheit der Punkte, die aus einer Strecke und deren beiden Verlängerungen besteht. Die Verlängerungen kann man sich unbegrenzt, bis ins Unendliche fortgesetzt denken. Man schreibt deshalb der Geraden eine unendliche Länge zu. Jede Gerade ist durch zwei ihrer Punkte vollständig bestimmt. Jede Gerade läßt sich so in sich selbst verschieben, daß stets vollständige Deckung stattfindet. (Dies ist auch der Fall beim Kreis und bei der Schraubenlinie.) Alle Geraden sind unter sich kongruent (nicht alle Kreise und Schraubenlinien).

4. Zwei Gerade im Raum haben einen Punkt gemeinschaftlich oder nicht; haben sie zwei Punkte gemeinschaftlich, so fallen sie zusammen. Liegt der gemeinschaftliche Punkt im Unendlichen, so sagt man: die beiden Geraden sind parallel oder auch: sie haben gleiche Richtung. Daß es Gerade gibt, die mit einer weiteren keinen Punkt gemeinschaftlich haben, schließen wir daraus, daß eine Gerade dem Auge als Punkt erscheinen kann, während andere Gerade nicht durch diesen Punkt zu gehen scheinen. Zwei Gerade, die keinen Punkt gemeinschaftlich haben, heißen windschiefe Gerade.

5. Es seien zwei windschiefe Gerade und ein Punkt P außerhalb der beiden Geraden gegeben. Man stellt dann den Grundsatz auf: Es gibt immer nur eine durch P gehende Gerade, welche die beiden anderen Geraden, jede in einem

Punkt, trifft. (Zwei windschiefe Gerade scheinen, von einem beliebigen Punkt aus gesehen, nur einen Punkt gemeinschaftlich zu haben.)

6. Aus den Eigenschaften der Geraden lassen sich diejenigen der Ebene ableiten:

Gegeben sei im Raume eine feste Gerade g und ein fester Punkt P außerhalb g. Durch jeden Punkt von g und P ist dann eine Gerade bestimmt. Die Gesamtheit dieser Geraden bildet dann eine Fläche, eine Ebene.

Es ergeben sich nun folgende Eigenschaften der Ebene:

a) Eine Gerade l hat mit einer Ebene nur einen Punkt, den Schnittpunkt, gemeinschaftlich; denn es gibt nur eine durch P gehende Gerade, welche g und l zugleich trifft. Hat eine Gerade mit einer Ebene zwei Punkte gemeinschaftlich, so gehört sie ganz der Ebene an.

b) Jede Ebene enthält zweifach unendlich viele Punkte und ebenso viele Gerade. Man erhält nämlich alle Gerade der Ebene, indem man in der Ebene zwei feste Gerade an nimmt und jeden Punkt der einen Geraden mit jedem Punkt der anderen verbindet.

c) Die Ebene dehnt sich daher nach allen Richtungen hin ins Unendliche aus.

d) Eine Ebene ist bestimmt:

α) durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb der Geraden;

β) durch zwei sich schneidende Gerade; durch zwei parallele Gerade, wo der gemeinschaftliche Punkt im Unendlichen liegt;

γ) durch drei Punkte, die nicht in derselben Geraden liegen.

e) Alle Ebenen sind kongruent.

f) Jede Ebene läßt sich derart in sich selbst verschie-

ben und drehen, daß stets vollständige Deckung vorhanden ist.

7. Auch im Raume gilt der Grundsatz: Durch einen gegebenen Punkt kann man zu einer gegebenen Geraden nur eine einzige Parallele ziehen; diese liegt in der durch den Punkt und die Gerade bestimmten Ebene. Man sagt auch: die Gerade bezitzt nur einen unendlich fernen Punkt.

(Bemerkung. Durch diesen Grundsatz wird die sogenannte hyperbolische Geometrie ausgeschlossen, bei welcher der Geraden zwei unendlich ferne Punkte zukommen.)

8. Der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene kann auch ins Unendliche fallen; man sagt dann: Die Gerade und die Ebene sind parallel; auch: Die Gerade und die Ebene schneiden sich nicht.

9. Zwei Ebenen, die nicht zusammenfallen, haben eine Gerade und nur eine einzige gemeinschaftlich. Diese Gerade heißt die Schnittgerade der beiden Ebenen. (Würden zwei Ebenen sich nach mehreren Geraden oder nach einer krummen Linie schneiden, so könnte man durch drei nicht in derselben Geraden liegende Punkte zwei nicht zusammenfallende Ebenen legen.) Haben zwei Ebenen im Endlichen keine Gerade gemeinschaftlich, fällt die Schnittgerade ins Unendliche, so sagt man: die beiden Ebenen sind parallel. Man nimmt deshalb an: die unendlich fernen Punkte einer Ebene liegen auf einer Geraden, der unendlich fernen Geraden der Ebene; durch diese Gerade gehen einfach unendlich viele Ebenen, die unter sich parallel sind.

10. Drei Ebenen haben im allgemeinen nur einen Punkt gemeinschaftlich; sie schneiden sich nur in einem Punkt. Dieser Punkt heißt der Schnittpunkt der drei Ebenen. Durch ihn gehen alle drei Schnittgeraden von je zwei Ebenen; in ihm schneidet die Schnittgerade zweier Ebenen die dritte Ebene (Figur 1).

[Bemerkung. Figur 1a ist das Netz eines dreiseitigen Prismas (Figur 1), das man sich verfertigen möge, damit gewisse Sätze zur Anschauung kommen.]

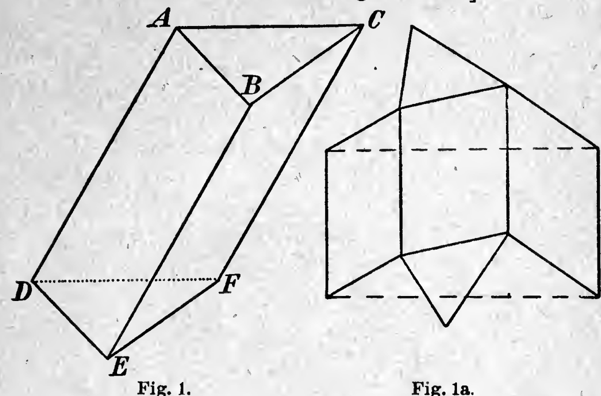


Fig. 1. Fig. 1a.

Der Schnittpunkt dreier Ebenen kann auch ins Unendliche fallen. Dies ist der Fall:

a) wenn zwei von den Ebenen parallel sind (Figur 1);
b) wenn die Schnittgerade zweier Ebenen parallel der dritten Ebene ist (Figur 1). In diesem Fall sind die drei Schnittgeraden der drei Ebenen unter sich parallel; ferner ist die Schnittgerade je zweier Ebenen parallel der dritten Ebene.

Drei oder mehrere Ebenen können auch dieselbe Gerade gemeinschaftlich haben. Fällt diese Gerade ins Unendliche, so sind die Ebenen unter sich parallel.

11. Die grundlegenden Konstruktionen. Als möglich und bekannt wird die Lösung folgender Konstruktionsaufgaben vorausgesetzt:

a) in der ebenen Geometrie:
1. zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden,

2. den Schnittpunkt zweier Geraden zu bestimmen,
3. die beiden Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises zu bestimmen,
4. die beiden Schnittpunkte zweier Kreise zu bestimmen;

b) in der Stereometrie außer diesen Aufgaben:
1. durch drei Punkte eine Ebene zu legen,
2. ebenso durch eine Gerade und einen Punkt und
3. durch zwei sich schneidende oder parallele Gerade.

B. Lehrsätze, Aufgaben und Erklärungen, welche gerade Linien und Ebenen betreffen.

1. Lehrsatz.

Zwei oder mehrere parallele Ebenen werden von einer weiteren Ebene nach parallelen Geraden geschnitten (Figur 1).

Beweis. Man betrachte nur zwei parallele Ebenen. Die drei Ebenen schneiden sich dann in einem Punkt, der aber im Unendlichen liegt. Durch ihn aber gehen die beiden im Endlichen liegenden Schnittgeraden; diese sind somit parallel.

2. Lehrsatz.

Alle Ebenen, die einer weiteren Ebene parallel sind, sind unter sich parallel.

Beweis. Alle gehen durch dieselbe unendlich ferne Gerade (A, 9).

3. Lehrsatz.

Zwei parallele Ebenen schneiden von parallelen Geraden gleiche Strecken aus (Figur 1).

Beweis. Man lege durch eine der parallelen Geraden und jede andere eine Ebene. In jeder dieser Ebenen er-

hält man dann ein Parallelogramm. Diese Parallelogramme aber stimmen in zwei parallelen Seiten, gerade in den ausgeschnittenen Strecken überein.

4. Lehrsatz.

Zieht man durch einen festen Punkt Gerade, die zwei parallele Ebenen schneiden, so haben die zwei Abschnitte, die durch den Punkt und die beiden Ebenen bestimmt sind, immer dasselbe Verhältnis.

Beweis. Legt man durch zwei dieser Geraden eine Ebene, so erhält man in dieser zwei ähnliche Dreiecke; für diese aber gilt die im Satze ausgesprochene Behauptung.

5. Lehrsatz.

Drei parallele Ebenen schneiden von beliebigen Geraden je zwei Strecken aus, die proportional zueinander sind (Figur 2).

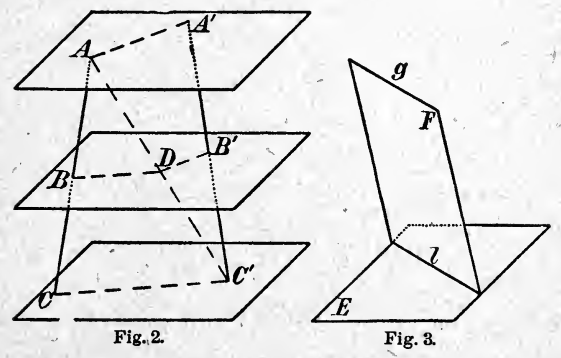


Fig. 2. Fig. 3.

Beweis. Die Schnittpunkte der einen Geraden mit den drei Ebenen seien A, B, C, diejenigen einer anderen A', B', C'. Ziehe AC' und verbinde den

Schnittpunkt D mit B und B'; ferner A mit A', C mit C'. Dann ist $\triangle ABD \sim \triangle ACC'$ und $\triangle C'DB' \sim \triangle C'AA'$. Daher ist: $AB:BC = AD:DC' = A'B':B'C'$.

6. Lehrsatz.

Alle Geraden, die einer weiteren Geraden parallel sind, sind unter sich parallel.

Beweis. Alle gehen durch denselben unendlich fernen Punkt (A, 4 und 7).

7. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt P im Raum zu einer gegebenen Geraden g die Parallele zu ziehen.

Konstruktion. Lege durch P und g die Ebene und ziehe in dieser durch P zu g die Parallele wie in der ebenen Geometrie.

8. Lehrsatz.

Eine Gerade g ist parallel einer Ebene E, wenn g parallel ist einer Geraden l, welche E angehört (Figur 3).

Beweis. Lege durch g und l die Ebene F. Würde g die Ebene E im Endlichen schneiden, so müßte der Schnittpunkt auch in F liegen und somit auf der Schnittgeraden l; dann wäre aber g nicht parallel l.

9. Lehrsatz.

Legt man durch eine Gerade g, die parallel einer Ebene E ist, Ebenen, welche E schneiden, so sind die Schnittgeraden unter sich parallel und parallel der Geraden g (Figur 1 und 3).

Beweis. Betrachte das Gebilde, das aus E und zwei durch g gehenden Ebenen besteht.

10. Lehrsatz.

Sind die Schenkel eines Winkels parallel den Schenkeln eines anderen Winkels, so sind die Ebenen der Schenkel parallel (Figur 1).

Beweis. Würden sich die Ebenen der beiden Schenkel im Endlichen schneiden, so müßte die Schnittgerade parallel zu beiden Schenkeln der beiden Winkel sein (Satz 8 und 9). Dies ist nicht möglich (A, 7). Die Ebenen schneiden sich somit im Unendlichen; sie sind parallel.

11. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt P die Ebene F zu legen, welche einer gegebenen Ebene E parallel ist.

Konstruktion. Ziehe in E zwei beliebige Gerade und ziehe durch P zu diesen Geraden die Parallelen. Durch die beiden Parallelen lege man die Ebene F.

Beweis. Er folgt aus Satz 10.

12. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt P die Ebene E zu legen, die parallel zwei gegebenen Geraden g und l ist.

Konstruktion. Ziehe durch P die Parallelen zu g und l und lege durch sie die Ebene E.

Beweis. Er folgt aus Satz 8.

13. Aufgabe.

Durch eine gegebene Gerade g die Ebene E zu legen, die einer gegebenen Geraden l parallel ist.

Konstruktion. Ziehe durch einen beliebigen Punkt von g zu l die Parallele p. Lege durch g und p die Ebene E.

Beweis. Er folgt aus Satz 8 und A, 6, a.

14. Lehrsatz.

Ist eine Gerade g zwei Ebenen E und F parallel, so ist g parallel der Schnittgeraden s von E und F.

Beweis. Lege durch g und einen Punkt von s die Ebene; diese schneidet E und F nach Geraden, die parallel g sind (Satz 8). Die beiden Geraden müssen aber zusammenfallen, nämlich mit der Schnittgeraden s (A, 7).

15. Lehrsatz.

Sind die Schenkel eines Winkels parallel den Schenkeln eines anderen Winkels und gleich gerichtet, so sind die Winkel gleich (Figur 1).

Beweis. In der Figur 1 sei $AB \parallel DE$ und $AB = DE$; ebenso $AC \parallel DF$ und $AC = DF$. Dann sind $ABED$ und $ACFD$ Parallelogramme; folglich ist $BE \parallel AD$ und $CF \parallel AD$. Nach Satz 6 ist dann auch $BE \parallel CF$; auch ist $BE = CF = AD$. $BCFE$ ist somit ebenfalls ein Parallelogramm und somit $BC = EF$. Nach dem dritten Kongruenzsatz ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ und somit $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$.

16. Lehrsatz.

Steht eine Gerade auf zwei sich schneidenden Geraden in deren Schnittpunkt senkrecht, so steht sie auch auf jeder anderen Geraden senkrecht, welche durch den Schnittpunkt in der Ebene der beiden Geraden gezogen wird (Figur 4).

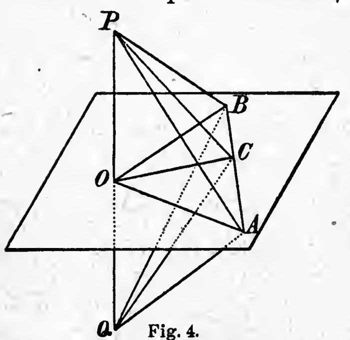


Fig. 4.

Beweis. Mache $OQ = OP$ und ziehe in der Ebene der beiden Geraden OA und OB durch O die beliebige Gerade OC und die weitere Gerade ACB. Dann ist $AP = AQ$, $BP = BQ$, $AB = AB$; folglich ist $\triangle BAP \cong BAQ$ und daher $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CAQ$.

Da ferner $AP = AQ$ und $AC = AC$ ist, so ist $\triangle ACP \cong ACQ$; folglich ist $CP = CQ$. Da weiter $OC = OC$, $OP = OQ$ ist, so ist $\triangle COP \cong COQ$. Hieraus folgt, daß $\sphericalangle COP = \sphericalangle COQ = R$ ist.

17. Erklärung.

Die Gerade POQ nennt man ein Lot der Ebene. Man sagt auch: die Gerade und die Ebene stehen aufeinander senkrecht. Den Schnittpunkt des Lotes mit der Ebene nennt man den Fußpunkt des Lotes. Die Ebene heißt Normalebene.

Aus Satz 16 folgt der weitere:

18. Lehrsatz.

Dreht man einen rechten Winkel um den einen Schenkel, so beschreibt der andere eine Ebene, die auf dem ersten Schenkel senkrecht steht. Jeder Punkt des zweiten Schenkels beschreibt einen Kreis in dieser Ebene, weil er von dem festbleibenden Fußpunkt bei der Drehung immer gleich weit entfernt ist.

19. Lehrsatz und Erklärung.

Die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Ebene ist die Strecke des Lotes, die zwischen dem Punkt und dem Fußpunkt des Lotes liegt.

Diese kürzeste Entfernung heißt auch der Abstand des Punktes von der Ebene.

Denn verbindet man den Punkt mit irgend einem Punkt der Ebene und letzteren mit dem Fußpunkt des Lotes, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck (Satz 16), in welchem die erste Verbindungsstrecke die Hypotenuse, das Lot eine der beiden Katheten ist. Die Kathete aber ist bekanntlich stets kleiner als die Hypotenuse.

20. Lehrsatz.

In einem Punkt einer Ebene läßt sich nur **ein** Lot errichten.

Beweis. Gäbe es zwei Lote, so könnte man durch sie eine Ebene legen, welche die erste Ebene nach einer Geraden schneidet. Diese Gerade müßte auf beiden Loten senkrecht stehen (Satz 16), was nicht möglich ist. Es gibt somit nur **ein** Lot in einem Punkte einer Ebene.

21. Lehrsatz.

Durch einen Punkt einer Geraden läßt sich nur **eine** Ebene legen, welche auf der Geraden senkrecht steht.

Beweis. Gäbe es zwei Ebenen, so würde eine beliebige Ebene durch die Gerade die beiden Ebenen nach zwei Geraden schneiden, welche auf der ersten Geraden in demselben Punkt senkrecht stehen, was nicht möglich ist.

22. Aufgabe.

In einem Punkt P einer Geraden g die Normalebene zu konstruieren.

Konstruktion. Lege durch g zwei beliebige Ebenen und errichte in diesen auf g die durch P gehenden Lote. Diese beiden Lote bestimmen die verlangte Normalebene.

23. Lehrsatz.

Von einem Punkt außerhalb einer Ebene läßt sich nur **ein** Lot auf die Ebene fällen.

Beweis. Gäbe es zwei, so könnte man durch sie eine Ebene legen, welche die erste Ebene schneidet. Dann würde aber ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen, was nicht möglich ist.

24. Lehrsatz und Konstruktion.

Es gibt nur eine Ebene, welche auf einer festen Geraden g senkrecht steht und durch einen festen Punkt P außerhalb der Geraden geht.

Diese Ebene wird erhalten, indem man von P aus auf g das Lot l fällt und wie in Aufgabe 22 in dem Fußpunkt die Normalebene konstruiert.

Beweis. Die gesuchte Normalebene enthält notwendig l und den Fußpunkt von l. Nach Nr. 21 gibt es aber nur eine Normalebene.

25. Lehrsatz.

Alle Ebenen, die auf einer Geraden g senkrecht stehen, sind parallel.

Beweis. Eine beliebige durch g gelegte Ebene schneidet die Ebenen nach parallelen Geraden, da sie auf g senkrecht stehen (Satz 16). Die Ebenen sind dann nach Satz 10 parallel.

26. Lehrsatz.

Steht eine Gerade g auf der einen von mehreren parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf den anderen senkrecht.

Beweis. Eine beliebige durch g gelegte Ebene schneidet aus den parallelen Ebenen parallele Gerade aus, die alle auf g senkrecht stehen. Nach Satz 16 steht g auf allen diesen Ebenen senkrecht.

27. Lehrsatz.

Steht von zwei Parallelen l und l' die eine l auf einer Ebene E senkrecht, so steht auch l' auf E senkrecht (Figur 5).

Beweis. Ziehe in E durch die Fußpunkte $g \parallel g'$ und $h \parallel h'$; dann ist $\sphericalangle (l\,g) = \sphericalangle (l'\,g') = R$ und $\sphericalangle (l\,h) = \sphericalangle (l'\,h') = R$ (Satz 15). Nach Nr. 16 und 17 ist somit $l' \perp E$.

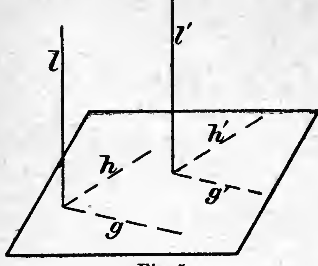


Fig. 5.

28. Lehrsatz.

Alle Lote derselben Ebene E sind parallel.

Beweis. Man greife ein Lot heraus und ziehe durch die Fußpunkte der anderen die Parallelen zu diesem Lot. Nach Satz 27 stehen diese auf E senkrecht. In demselben Punkt von E kann man aber nur ein Lot errichten. Alle Lote von E sind somit unter sich parallel.

29. Lehrsatz und Erklärung.

Alle Lote zwischen zwei parallelen Ebenen sind gleich, und gleich dem Abstand der beiden Ebenen.

Beweis. Er folgt aus Satz 28 und 3

30. Erklärungen.

Der Neigungswinkel α zweier Ebenen E und F wird gemessen durch den Winkel, welchen die beiden Lote ein-

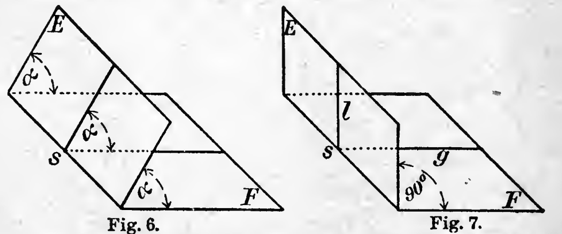


Fig. 6. Fig. 7.

schließen, die in einem beliebigen Punkt der Schnittgeraden beider Ebenen in diesen errichtet werden (Figur 6).

Aus Satz 15 folgt, daß es gleichgültig ist, an welcher Stelle der Neigungswinkel gemessen wird.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein Rechter, so sagt man: Die Ebenen stehen senkrecht aufeinander (Figur 7).

31. Lehrsatz.

Stehen zwei Ebenen E und F aufeinander senkrecht, so steht jedes Lot l, das in der einen Ebene E auf der Schnittgeraden s der Ebenen errichtet ist, senkrecht auf der anderen Ebene F (Figur 7).

Beweis. Errichtet man im Fußpunkt des Lotes auch in der anderen Ebene auf der Schnittgeraden das Lot g, so kommt Satz 16 in Anwendung ($l \perp s$ und $l \perp g$).

32. Lehrsatz.

Legt man durch das Lot l einer Ebene F eine beliebige Ebene E, so ist $E \perp F$ (Figur 7).

Beweis. Ziehe $g \perp s$, so ist $l \perp s$ und $l \perp g$.

33. Lehrsatz.

Stehen zwei Ebenen E und F aufeinander senkrecht und steht die Gerade l auf F senkrecht, während l mit E einen Punkt im Endlichen gemeinschaftlich hat, so liegt l in E (Figur 7).

Beweis. Das Lot, das von dem Punkt aus auf die Schnittgerade gefällt wird, bzw. in dem Punkt auf der Schnittgeraden in E errichtet wird, ist nach Satz 31 $\perp F$. Nach Satz 20 und 23 fallen diese Lote zusammen Das Lot liegt somit in E.

34. Lehrsatz.

Stehen zwei Ebenen aufeinander senkrecht, so sind alle Lote der einen Ebene parallel der anderen Ebene.

Beweis. Er folgt aus den Sätzen 28, 31, 8.

35. Lehrsatz.

Die Schnittgerade s zweier Ebenen M und N, die auf einer dritten Ebene E senkrecht stehen, ist senkrecht E (Figur 8).

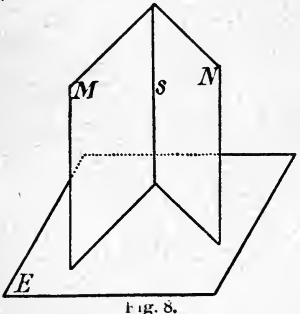


Fig. 8.

Beweis. Fälle von einem beliebigen Punkt von s auf E das Lot. Dieses liegt dann nach Satz 33 sowohl in M als auch in N; es fällt somit mit s zusammen.

36. Aufgabe.

In einem gegebenen Punkt P einer Ebene E das Lot zu errichten.

Konstruktion. Ziehe durch P in E eine beliebige Gerade; konstruiere zu dieser in P die Normalebene N (Nr. 22). N schneidet E nach s. Errichte auf s in P das in N liegende Lot l. Dieses ist das gesuchte Lot.

Beweis. Es ist $N \perp E$ (Satz 32); $l \perp s$; folglich ist nach Satz 31 $l \perp E$.

37. Aufgabe.

Von einem gegebenen Punkt P aus auf eine Ebene E das Lot zu fällen.

Konstruktion. Errichte in einem beliebigen Punkte von E das Lot und ziehe durch P zu diesem die Parallele.

38. Aufgabe.

Durch eine gegebene Gerade g die Ebene F zu legen, welche auf einer gegebenen Ebene E senkrecht steht.

Konstruktion. Fälle von einem beliebigen Punkt von g auf E das Lot l. Lege durch g und l die Ebene F.

39. Erklärungen.

Unter der **Projektion** eines Punktes auf eine Ebene **Projektionsebene** genannt, versteht man den Fußpunkt des Lotes, das vom Punkt aus auf die Ebene gefällt wird. Das Lot selbst heißt **projizierendes Lot**.

Unter der Projektion einer beliebigen geraden oder krummen Linie versteht man die Gesamtheit der Projektionen aller Punkte dieser Linien. Diese bildet im allgemeinen wieder eine (gerade oder krumme) Linie.

40. Lehrsatz und Erklärung.

Die Projektion p einer Geraden g auf eine Ebene P ist eine Gerade oder ein Punkt. Der letzte Fall tritt ein, wenn die Gerade auf der Projektionsebene senkrecht steht (Figur 9).

Beweis. Legt man nämlich durch zwei projizierende (parallele) Lote die Ebene F, so ist $F \perp P$ (Satz 22). F enthält, weil g in F liegt, nach Satz 33 auch alle übrigen projizierenden Lote, die zu den einzelnen Punkten von g gehören. F heißt die **projizierende Ebene** von g; diese schneidet die Projektionsebene P nach der Geraden p, nach der Projektion von g.

Fig. 9.

41. Erklärung.

Unter dem **Neigungswinkel** α einer Geraden g gegen eine Ebene P versteht man den spitzen Winkel, den g und ihre Projektion p einschließen (Figur 9).

42. Lehrsatz.

Die Projektionen von parallelen Geraden sind parallele Gerade; die projizierenden Ebenen sind parallel (Figur 10).

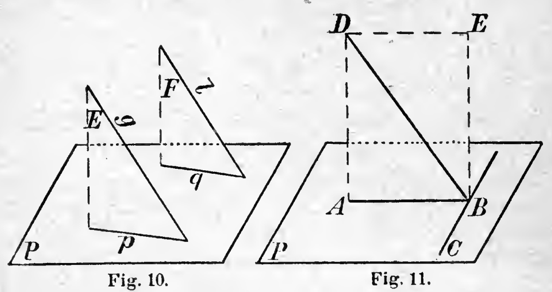


Fig. 10. Fig. 11.

Beweis. Es sei $g \parallel l$; p und q seien die Projektionen von g und l; ferner E und F die projizierenden Ebenen von g und l. Weil E und F durch parallele projizierende Lote gehen und $g \parallel l$ ist, so ist $E \parallel F$ (Satz 15); nach Satz 1 ist daher $p \parallel q$.

Folgerung: Die Projektion eines Parallelogramms ist wieder ein Parallelogramm; die Projektionen von parallelen und gleichen Strecken sind ebenfalls parallel und gleich.

43. Lehrsatz.

Die Projektion eines rechten Winkels ist wieder ein Rechter, wenn einer seiner Schenkel in der Projektionsebene liegt oder ihr parallel ist (Figur 11).

Beweis. Ist $\sphericalangle DBC = R$, so ziehe BE parallel dem projizierenden Lot AD. Dann ist $EB \perp BC$ und die durch AD und EB gelegte Ebene senkrecht BC. Nach Satz 16 steht insbesondere CB auf der Projektion AB von BD senkrecht.

44. Lehrsatz.

Ist die Projektion eines Winkels, dessen einer Schenkel in der Projektionsebene liegt oder ihr parallel ist, ein Rechter, so ist der Winkel selbst ein Rechter (Figur 11).

Beweis. Ist $BC \perp AB$ und $BE \parallel$ Lot AD, so ist $BC \perp$ Ebene $BADE$ und daher $BC \perp BD$.

45. Lehrsatz.

Steht eine gerade AD auf einer Ebene P senkrecht und projiziert man AD auf eine zweite Ebene, so steht die Projektion DB auf der Schnittgeraden BC senkrecht (Figur 11).

Beweis. Die Projektionsebene sei die durch DB und BC gelegte Ebene und ABD die projizierende Ebene von AD. ABC steht dann auch auf P senkrecht. Die Schnittgerade BC der Projektionsebene und der Ebene P steht somit auf der Ebene ABD senkrecht; folglich ist $BC \perp BD$.

C. Weitere Aufgaben, Lehrsätze und Erklärungen.

1. Aufgabe.

Wie viele Gerade lassen sich durch 5 [n] feste Punkte des Raumes legen?

Antwort: $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$; $\frac{n(n-1)}{2}$.

2. Aufgabe.

Wie viele Schnittgerade sind durch 6 [n] beliebige, aber feste Ebenen des Raumes bestimmt?

Antwort: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$; $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Aufgabe.

Wie viele Ebenen sind durch 5 [n] beliebige, aber feste Punkte des Raumes bestimmt?

Antwort: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

4. Aufgabe.

Wie viele Schnittpunkte sind durch 5 [n] beliebige, aber feste Ebenen des Raumes bestimmt?

Antwort: $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

5. Lehrsatz.

Jede Gerade, die in der einen von zwei parallelen Ebenen liegt, ist parallel der anderen Ebene.

6. Lehrsatz.

Sind zwei Ebenen parallel, ebenso zwei andere, so sind die 4 Schnittgeraden unter sich parallel.

7. Lehrsatz.

Parallele Gerade haben gegen dieselbe Ebene gleiche Neigung.

8. Lehrsatz.

Parallele Ebenen haben gegen dieselbe Ebene gleiche Neigung.

9. Aufgabe.

Die Gerade zu konstruieren, die auf zwei windschiefen Geraden senkrecht steht.

Auflösung. Man lege durch die eine Gerade die Ebene, die der zweiten Geraden parallel ist. Dann projiziere man die zweite Gerade auf diese Ebene. Die Projektion schneidet dann die erste Gerade in einem Punkt; in ihm errichte man auf der Ebene das Lot. Dieses Lot ist dann die gesuchte Gerade.

10. Lehrsatz.

Hat eine Strecke die Länge s, ihre senkrechte Projektion die Länge p und ist α der Neigungswinkel der Strecke gegen die Projektionsebene, so ist

$$p = s \cos \alpha.$$

Beweis. Man betrachte das Trapez, dessen Grundlinien die projizierenden Lote der Endpunkte der Strecke sind, während s und p die anderen Seiten des Trapezes sind.

Zusätze: 1. Eine Strecke projiziert sich nur dann in wahrer Größe, wenn sie parallel der Projektionsebene ist.

2. Ein Dreieck und somit jede ebene Figur projiziert sich nur dann in wahrer Größe, wenn diese Gebilde parallel der Projektionsebene sind.

11. Lehrsatz.

Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei festen Punkten gleich weit entfernt sind, ist die Ebene, die auf der Verbindungsstrecke der beiden Punkte in der Mitte der Strecke senkrecht steht. Diese Ebene heißt die Mittellotebene der Strecke.

Beweis. Verbinde einen beliebigen Punkt der Mittellotebene mit den beiden gegebenen Punkten und mit der Mitte der Strecke und betrachte die entstehenden kongruenten, rechtwinkligen Dreiecke.

12. Aufgabe.

Den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, die von zwei festen Ebenen gleiche senkrechte Abstände haben.

Auflösung. Der geometrische Ort ist die Ebene, Medianebene genannt, welche man erhält, indem man einen Neigungswinkel der Ebenen halbiert und durch die Halbierungsgerade und die Schnittgerade der Ebenen die Ebene hindurchlegt.

13. Aufgabe.

Den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, die von drei festen Punkten gleich weit entfernt sind.

Auflösung. Lege durch die drei Punkte die Ebene und konstruiere in ihr den durch die drei Punkte gehenden Kreis. Im Mittelpunkt des Kreises errichte mit der Ebene das Lot; oder berücksichtige C, 11.

14. Aufgabe.

Den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, die von drei festen Ebenen gleiche senkrechte Entfernungen haben.

Auflösung. Konstruiere zu je zwei Ebenen die Medianebene. Diese drei Ebenen schneiden sich nach derselben Geraden, dem gesuchten geometrischen Ort.

15. Aufgabe.

Gegeben ist eine Gerade G und eine Ebene E. Durch G eine Ebene F mit dem Neigungswinkel α zu legen.

Auflösung. Projiziere einen beliebigen von Punkt G auf E. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete das projizierende Lot ist, während der gegenüberliegende Winkel gleich α ist. Beschreibe um die Projektion des Punktes als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Radius gleich der anderen Kathete ist. Schneide G mit E; ziehe vom Schnittpunkt aus an den Kreis die Tangenten. Diese bestimmen mit G die beiden gesuchten Ebenen F.

16. Aufgabe.

Die unendlich vielen Geraden zu bestimmen, die durch einen festen Punkt P gehen und gegen eine feste Ebene E dieselbe Neigung α haben.

Auflösung. Projiziere P auf E und konstruiere, wie in Nr. 15, ein rechtwinkliges Dreieck und um die Projektion

als Mittelpunkt den Kreis. Jeder Punkt des Kreises bestimmt mit P eine Gerade der verlangten Art.

D. Parallelprojektionen.

a) Die senkrechte (orthogonale) Projektion.

In B und C wurde diese für Punkte, Gerade und andere Gebilde behandelt. Sie heißt senkrechte Parallelprojektion, weil die projizierenden Lote, die projizierenden Strahlen unter sich parallel sind und auf der Projektionsebene senkrecht stehen. Die senkrechte Projektion gibt uns ein Bild von Raumgebilden, das eindeutig bestimmt ist. Denn jedem Punkt im Raum entspricht ein bestimmter Punkt in der Projektionsebene, nämlich der Fußpunkt des Lotes, das vom Punkt aus auf die Ebene gefällt ist. Dagegen aber entspricht einem Punkt der Bildebene nicht ein einziger Punkt im Raum, sondern ihm entsprechen unendlich viele Punkte, nämlich alle, welche auf dem in ihm errichteten Lote liegen.

Da wegen dieser Vieldeutigkeit mit einer einzigen Projektion nicht viel anzufangen ist, führt man eine zweite Projektionsebene ein, die auf der ersten senkrecht steht. Man spricht dann von einer ersten Projektionsebene P_1 und einer zweiten P_2; wohl auch von einer Grundriß- und Aufrißebene; die in P_1 und P_2 liegenden Projektionsjektionen heißen auch Grundriß und Aufriß. P_1 und P_2 schneiden sich in der Projektionsachse X, im Grundschnitt (Figuren 12 und 13).

1. Abbildung, Darstellung des Punktes (Figuren 12 und 13).

Ein Punkt a im Raum wird sowohl auf P_1 als auf P_2 projiziert; die Fußpunkte a' und a'' sind dann bzw. die erste und zweite Projektion des Punktes a.

Legt man durch $a\,a'$ und $a\,a''$ die Ebene E, so steht E auf P_1 und P_2 senkrecht und schneidet die Projektionsachse X in dem Punkt a_x; ferner schneidet E die Ebene P_1 nach

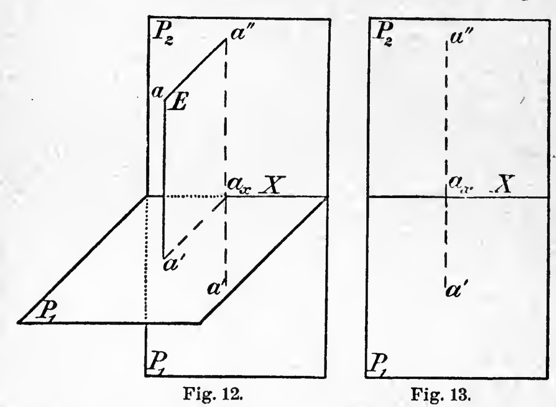


Fig. 12. Fig. 13.

$a'a_x$ und P_2 nach $a''a_x$. Nach B, Satz 35, ist dann $X \perp E$ und daher auch $X \perp a'a_x$, $X \perp a''a_x$; ferner ist $a'a_x \perp a''a_x$ (B, 30) und $a\,a'' \perp a''a_x$, $a\,a' \perp a'a_x$. $a\,a'a_x a''$ ist somit ein Rechteck und daher $a\,a'' = a'a_x$ und $a\,a' = a''a_x$.

Da man nicht leicht in zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen zeichnen kann, dreht man P_1 um X in die Ebene P_2 (Figur 13). Man erhält dann die Sätze:

α) Die beiden Projektionen a' und a'' eines Punktes a im Raum liegen stets auf demselben Lote der Projektionsachse (Figur 13).

β) Ein Punkt a im Raum wird erhalten, indem man in a'' auf P_2 das Lot $a''a = a'a_x$ errichtet.

2. Darstellung der Strecke (Figuren 14 und 15). Die beiden Projektionen einer Strecke sind Strecken, die durch

die Projektionen der Endpunkte der Strecke bestimmt sind. Wichtig ist hier Satz 42 in B über parallele Gerade samt Folgerung.

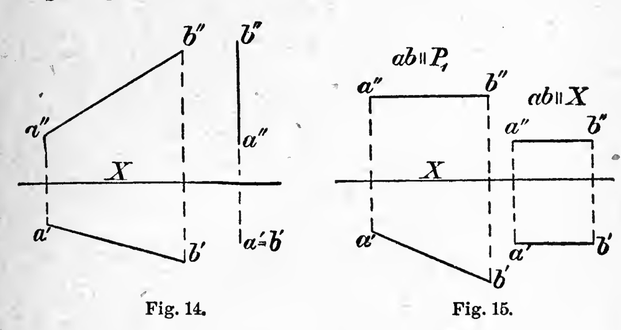


Fig. 14. Fig. 15.

3. Darstellung des Dreiecks. Sie ist ohne weiteres aus Figur 16 ersichtlich. Punkt a liegt in der Ebene des Dreiecks 123.

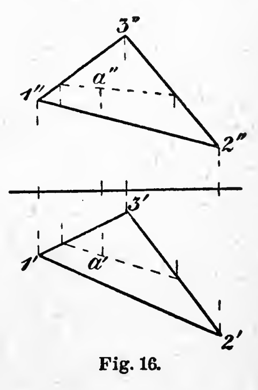


Fig. 16.

4. Darstellung von Vielecken und krummen Linien. Bei den Vielecken werden die einzelnen Eckpunkte projiziert und die Projektionen in richtiger Weise geradlinig miteinander verbunden. Bei Kurven denkt man sich sämtliche Punkte projiziert; praktisch projiziert man eine genügende Anzahl von Punkten auf P_1 und P_2 und verbindet dann die Projektionen miteinander.

In Figur 17 ist ein Parallelogramm projiziert; in Figur 18 ein ebenes Viereck, in welchem die Diagonalen sich in dem Punkt s schneiden. In Figur 19 ist derselbe Kreis

in zwei verschiedenen Lagen dargestellt. Der Kreis ist zunächst parallel P_2, dann senkrecht P_1.

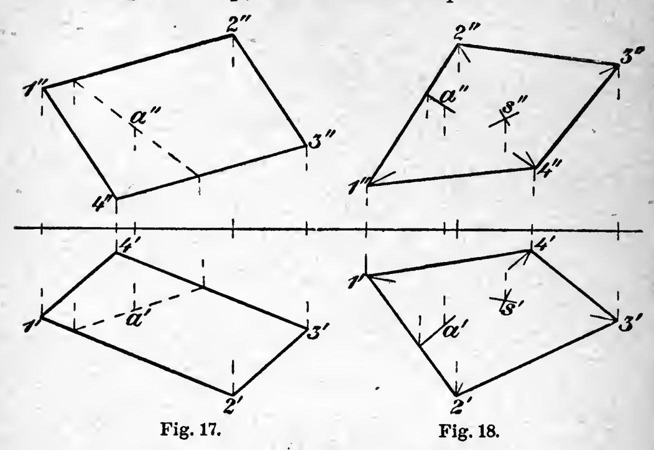


Fig. 17. Fig. 18.

5. Darstellung von Flächen.

α) Eine Ebene ist durch ein ebenes Vieleck bestimmt; z. B. durch ein Dreieck, ein Parallelogramm, ein Trapez, ein Viereck. In den Figuren 16, 17 und 18 ist ein Punkt a der Ebene dargestellt. Auch ein Kreis bestimmt eine Ebene.

β) Beispiele für die Darstellung krummer Flächen finden sich im zweiten Abschnitt. Man muß hier die Erzeugungsweise der Fläche, etwa durch Linien, kennen.

6. Darstellung von Körpern.

Bei einem Körper hat man seine Oberfläche darzustellen. In den Figuren 20, 21 und 22 sind die Projektionen von 3 Körpern gegeben. Es sind dort diejenigen Kanten, die nicht sichtbar sind, wenn man seinen Blick senkrecht zur Projektionsebene richtet, punktiert gezeichnet.

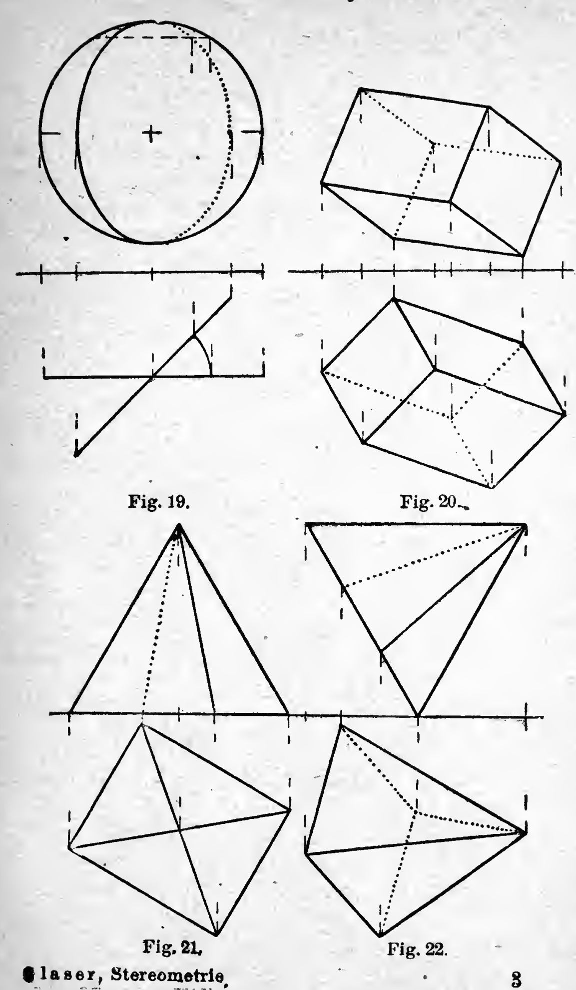


Fig. 19. Fig. 20.

Fig. 21. Fig. 22.

b) Die schiefe Parallelprojektion.

Bei dieser sind die projizierenden Strahlen ebenfalls parallel; sie stehen aber nicht senkrecht auf der Projektionsebene. Man betrachte ein Gebilde und seinen Schatten auf einer Ebene, wenn die Lichtstrahlen von der Sonne ausgehen und die Strahlen gegen die Ebene geneigt sind; der Schatten ist dann die schiefe Projektion des Gebildes.

Will man ein Gebilde auf eine Projektionsebene schief projizieren, so muß außer dieser noch eine Gerade L ge-

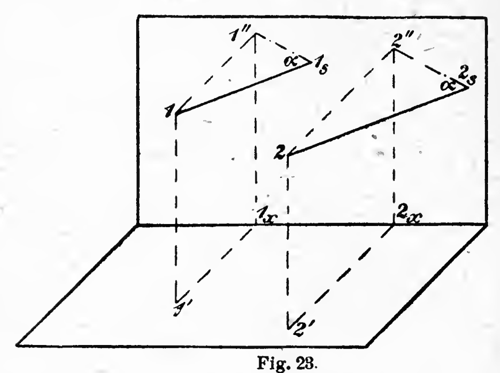


Fig. 23.

gehen sein. Man hat dann durch sämtliche Punkte des Gebildes die Parallelen zu L zu ziehen; diese schneiden die Projektionsebene in den schiefen Projektionen der einzelnen Punkte. Die Gesamtheit dieser Projektionen bildet die schiefe Projektion des Gebildes.

Auch bei der schiefen Parallelprojektion gilt der Satz: Die Projektionen paralleler Geraden sind ebenfalls parallele Gerade. Der Beweis hierfür folgt aus A, Satz 10 und 1.

Ist ein Gebilde durch seinen Grund- und Aufriß gegeben,

so kann man leicht eine schiefe Projektion des Gebildes herstellen. Als Bildebene dient dann meistens die Aufrißebene. Im folgenden seien zwei Punkte 1 und 2 und ihre senkrechten Projektionen $1', 1'', 2', 2''$ gegeben (Figuren 23 und 24). Projiziert man die beiden Punkte 1 und 2 schief auf P_2 unter demselben Neigungswinkel α, so erhält man die beiden Projektionen 1_s und 2_s; ferner die beiden Dreiecke $1 1'' 1_s$ und $2 2'' 2_s$. In diesen Dreiecken ist $1 1'' \parallel 2 2''$ und $1 1_s \parallel 2 2_s$ und daher Ebene $1 1'' 1_s \parallel$ Ebene $2 2'' 2_s$; folglich ist $1'' 1_s \parallel 2'' 2_s$. Ferner sind die

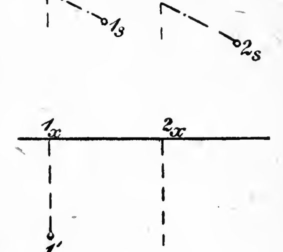


Fig. 24.

beiden Dreiecke $1 1'' 1_s$ und $2 2'' 2_s$ ähnliche rechtwinklige Dreiecke. $1'' 1_s$ und $2'' 2_s$ bilden also mit der Projektionsachse denselben Neigungswinkel δ; dasselbe gilt für alle Punkte des Raumes. Weiter ist $\cot\alpha = 1'' 1_s : 1 1'' = 2'' 2_s : 2 2'' = 1'' 1_s : 1' 1_x = 2'' 2_s : 2' 2_x$. Es handelt sich somit für alle Punkte um dasselbe Verhältnis, das sogenannte Verkürzungsverhältnis. Aus diesen Betrachtungen folgt, daß man aus den beiden senkrechten Projektionen leicht die schiefe Projektion eines Gebildes ableiten kann, sobald die Werte von δ und $\cot\alpha$ gegeben sind. Für δ wählt man vielfach $30°, 45°, 60°, 90°$ und für das Verkürzungsverhältnis $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$; ist dieses z. B. gleich $\frac{1}{2}$, so ist $1'' 1_s = \frac{1}{2} \cdot 1' 1_x, 2_x 2'' 2_s = \frac{1}{2} \cdot 2'$ usf. zu nehmen.

Hat ein Gebilde eine Symmetrieebene, welche parallel der Bildebene P_2 ist, so ist es vorteilhaft, diese zur Bildebene zu machen; die neue Projektionsachse X' ist dann Symmetrieachse für die erste Projektion des Gebildes und parallel der ursprünglichen Achse X.

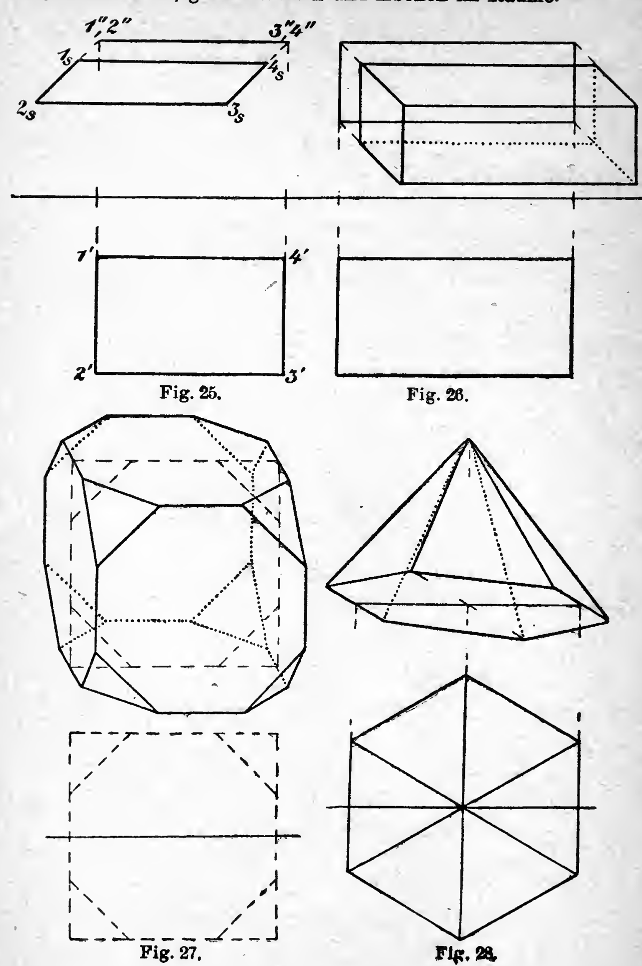


Fig. 25.

Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

Die schiefe Parallelprojektion findet hauptsächlich Anwendung bei der Darstellung von Kristallformen, beim Steinschnitt ($\delta = 45^0$, $\cot\alpha = 1$), bei stereometrischen Zeichnungen, auch beim Maschinenbau.

Figur 25 zeigt die schiefe Projektion eines Rechtecks ($\delta = 45^0$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}$) mit Oberansicht; Figur 26 diejenige eines Quaders. In Figur 27 handelt es sich um den Körper, den man erhält, indem man die 8 Ecken eines Würfels derart abstutzt, daß statt der 6 quadratischen Flächen 6 regelmäßige Achtecke erscheinen ($\delta = 60^0$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}$).

Figur 28 zeigt eine regelmäßige sechsseitige Pyramide in Unteransicht ($\delta = 30^0$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}$).

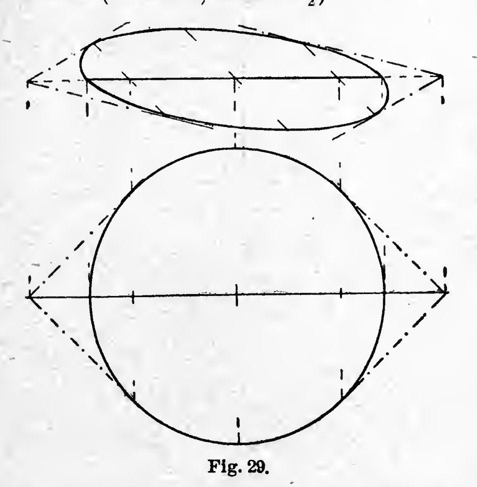


Fig. 29.

In Figur 29 ist ein Kreis samt einigen Tangenten schief projiziert ($\delta = 45^0$; $\cot\alpha = \frac{1}{2}$).

Zweiter Abschnitt.

Flächen und Körper.

A. Allgemeines.

Jeder Körper ist von einer Fläche, Oberfläche genannt, begrenzt. Die Oberfläche eines Körpers kann aus lauter ebenen Vielecken bestehen; dann heißt der Körper ein ebenflächiger Körper, ein Vielflach, ein Polyeder. Ist die Oberfläche eines Körpers nur teilweise eben oder überall gekrümmt, so heißt der Körper ein krummflächiger Körper oder ein Körper mit krummer Oberfläche.

Zwei Körper sind kongruent, wenn ihre Oberflächen zur Deckung gebracht werden können.

Zwei Körper oder zwei Gebilde sind symmetrisch, wenn sie in eine solche Lage gebracht werden können, daß immer zwei Punkte des Gebildes in bezug auf eine Ebene symmetrisch sind, d. h. daß immer je zwei Punkte, die auf verschiedenen Seiten einer Ebene liegen, von dieser Ebene, der Symmetrieebene, gleichen Abstand haben und auf demselben Lot der Ebene liegen. Rechte und linke Hand sind angenähert symmetrische Körper; ein Gebilde und sein Spiegelbild sind gegenseitig symmetrisch.

Man unterscheidet weiter noch zwischen einer Symmetrie in bezug auf einen Punkt und einer solchen in bezug auf eine Gerade.

Die Symmetrie in bezug auf einen Punkt liegt vor, wenn zwei Gebilde in eine solche Lage gebracht werden

können, daß alle Strecken, welche zwei Punkte, die sich im Gebilde entsprechen, verbinden, durch einen Punkt, den Symmetriepunkt, gehen und in ihm halbiert werden.

Die Symmetrie in bezug auf einen Punkt stimmt mit derjenigen in bezug auf eine Ebene überein. Denn legt man durch den Symmetriepunkt eine beliebige Gerade und dreht man um sie als Drehachse das eine Gebilde um 180°, so geht es in eine zu dem anderen Gebilde in bezug auf eine Ebene symmetrische Lage über. Diese Ebene steht senkrecht auf der Drehachse im Symmetriepunkt. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man sich diese Drehung bei einem Punkte vorgenommen denkt und dabei Abschn. I, B, 16 berücksichtigt.

Zwei Gebilde sind in bezug auf eine Gerade symmetrisch, wenn sie sich in eine solche Lage bringen lassen, daß immer die Verbindungslinien zweier Punkte der Gebilde, die zusammengehören, auf einer Geraden, der Symmetrieachse, senkrecht stehen und von letzterer halbiert werden.

Die Symmetrie in bezug auf eine Gerade stimmt mit der Kongruenz der Gebilde überein; denn dreht man das eine Gebilde um die Symmetrieachse um 180°, so kommt es mit dem anderen zur Deckung, weil immer zwei sich entsprechende Punkte zusammenfallen.

Zu einem Gebilde erhält man ein ähnliches oder symmetrisch ähnliches Gebilde, wenn man sämtliche Punkte des gegebenen Gebildes mit einem festen Punkt, dem Ähnlichkeitspunkt, verbindet und die Verbindungsstrecken immer in demselben Verhältnis verkürzt oder verlängert. Liegt der Ähnlichkeitspunkt zwischen zwei Punkten, die sich entsprechen, so handelt es sich um symmetrisch ähnliche Gebilde.

Bei den Vielflachen spricht man von Flächen, Kanten, Ecken, Diagonalen und einem Netz.

Unter den Flächen versteht man die ebenen Vielecke, welche die Oberfläche bilden. Wo zwei Vielecke der Oberfäche mit Seiten zusammenstoßen, ist eine Kante.

Ein Eckpunkt, kurz eine Ecke, befindet sich da, wo drei oder mehrere Flächen und zugleich ebenso viele Kanten in einem Punkt, der Ecke, zusammentreffen.

Eine Diagonale verbindet zwei Ecken, die nicht in derselben Ebene liegen, durch eine Strecke.

Die Oberfläche eines jeden Vielflaches läßt sich längs eines Kantenzuges oder auch längs mehrerer solcher Züge derart aufschneiden, daß man sie in einem Stück oder auch in mehreren derart in die Ebene ausbreiten kann, so daß das einzelne Stück nicht etwa doppelt bedeckt ist. Die Oberfläche eines Vielflaches, in die Ebene ausgebreitet, bildet sein Netz. Ist das Netz eines Körpers gegeben, so kann man aus ihm den Körper selbst und auch den zu ihm symmetrischen Körper herstellen. Man kann nämlich auf zwei Arten die Flächen um die Kanten drehen.

Für die Oberfäche der Polyeder und der Körper überhaupt sind die auf ihnen gezogenen Rückkehrschnitte von besonderer Bedeutung. Unter einem solchen Schnitt versteht man einen Schnitt, der die Fläche derart durchschneidet, daß er an einem beliebigen Punkt beginnend beliebig geführt wird, aber bei dem Punkt wieder zurückkehrt und sich nicht selbst durchschneidet. Ein solcher Schnitt nun kann eine vorgelegte Fläche immer in zwei getrennte Flächenstücke teilen oder auch nicht.

Die Oberfläche des Würfels, des Quaders, des Prismas, der Pyramide, der Kugel, des Zylinders und anderer Körper wird von jedem möglichen Rückkehrschnitt in zwei getrennte Teile geteilt.

Dagegen gibt es z. B. auf der Oberfläche eines Ringes unendlich viele Rückkehrschnitte, welche die Fläche nicht

in getrennte Teile zerlegen. Ist aber auf dieser Fläche ein solcher Schnitt vorhanden, so gibt es keinen weiteren Rückkehrschnitt, welcher die Fläche ungeteilt läßt.

Wichtig nun ist für eine Fläche die Anzahl p der Rückkehrschnitte, welche die Fläche nicht in 2 Teile trennen. Für den Würfel, die Kugel usf. ist also $p = 0$, für die Ringfläche ist $p = 1$.

Es mögen zunächst diejenigen Polyeder betrachtet werden, für die $p = 0$ ist. Auch soll die Oberfläche zunächst aus lauter einfachen Vielecken bestehen; aus einem Vieleck soll nicht etwa ein zweites derart ausgeschnitten sein, daß das Vieleck zwei Ränder besitzt. Man kann dann die Oberfläche in die Ebene in einem Stück ausbreiten, und zwischen der Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken besteht eine Beziehung. Ist nämlich F die Anzahl der Flächen, E die Anzahl der Ecken und K diejenige der Kanten, so ist:

$$F + E = K + 2 \quad \text{(Eulersche Formel).}$$

Will man nämlich das Netz des Körpers herstellen, so kann man längs eines einzigen Kantenzuges einen Schnitt derart ausführen, daß jede Ecke, aber jede, nur einmal getroffen wird. Man hat dann nach $(E - 1)$ Kanten aufgeschnitten. Sobald man nach einer weiteren Kante aufschneidet, zerfällt das Netz in zwei Stücke. Die Flächen hängen somit noch in $(F - 1)$ weiteren Kanten zusammen. Die Gesamtzahl K der Kanten ist somit:

$$K = E - 1 + F - 1 = E + F - 2; \text{ hieraus folgt:}$$
$$F + E = K + 2\,.$$

Für den Körper der Figur 30 ist p ebenfalls gleich Null, ferner $F = 9$, $E = 12$, $K = 18$. Die Formel gilt also nicht mehr. Eine Fläche aber besitzt zwei Ränder, nämlich das Dreieck, aus dem ein zweites ausgeschnitten ist. Um diese Fläche in eine Fläche mit nur einem Rand zu verwandeln, ist noch ein Schnitt, ein Querschnitt, zu

machen, der einen Punkt des einen Randes mit einem Punkt des anderen verbindet. Ist die Anzahl der nötigen Querschnitte gleich Q, so erhält man die Formel:

$$F + E = K + Q + 2 .$$

Ist p nicht gleich Null, so gilt die Formel:

$$F + E = K + Q + 2 - 2p .$$

Beispiel: Man stelle sich einen Rahmen vor, der entsteht, indem aus einem Quader ein zweiter ausgeschnitten ist.

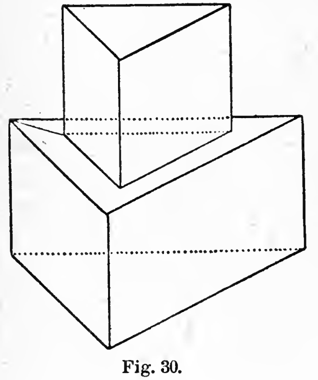


Fig. 30.

Für dieses Vielfach ist:

$$p = 1 , F = 10 , E = 16$$
$$K = 24 , Q = 2 .$$

Ist $p = 1$, $Q = 0$, so ist $F + E = K$.

Man denke sich hier einen Rückkehrschnitt längs eines Kantenzuges geführt; es werden dann gleich viele Kanten K_1, wie Ecken E_1 getroffen, und es entstehen zwei Ränder. Damit die Fläche in die Ebene ausgebreitet werden kann, müssen noch weitere Schnitte gemacht werden; es müssen jedenfalls alle Ecken berücksichtigt sein. Von Ecken eines Randes aus wird man weitere Schnitte nach neuen Ecken über Kanten führen ohne einen Rand nochmals zu treffen; es kommen dann gleich viele neue Ecken E_2, wie Kanten K_2 in Betracht. Schließlich bleibt noch eine Fläche übrig, welche die Form eines geschlossenen Bandes hat, weil noch 2 Ränder vorhanden sind. Um dieses ausbreiten zu können, ist noch längs eine Kante aufzuschneiden. Um alle Flächen F voneinander zu trennen, ist noch längs $K_3 = (F - 1)$ Kanten aufzuschneiden.

Es ist somit
$K = E_1 + E_2 + 1 + F - 1$; $E = E_1 + E_2$ und daher $F + E = K$.

In ähnlicher Weise ist zu schließen, wenn Q nicht gleich Null ist und wenn $p > 1$ ist.

Im folgenden mögen nur die wichtigsten Körper und Flächen behandelt werden.

B. Das Prisma und der Zylinder.

Zieht man durch alle Ecken eines ebenen Vielecks Parallelen, die nicht in der Ebene des Vielecks liegen; legt man ferner durch je zwei aufeinander folgende Parallele eine Ebene und schneidet diese Ebenen durch eine Ebene, die der Ebene des Vielecks parallel ist, so erhält man einen allseitig begrenzten Körper, ein Prisma. Das Prisma ist

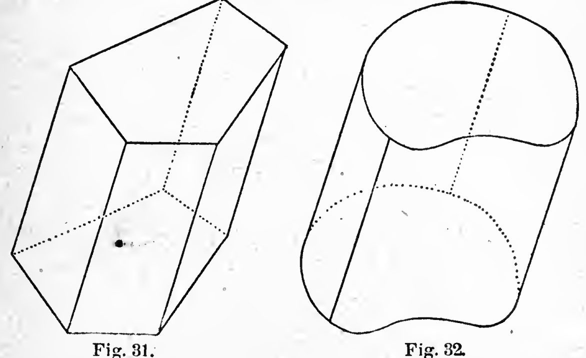


Fig. 31. Fig. 32.

ein Polyeder, da es von lauter ebenen Vielecken begrenzt ist (Figur 31).

Geht das Vieleck in eine krumme Linie über, so führt der Körper den Namen Zylinder. Der Zylinder ist ein krummflächiger Körper (Figur 32).

Im folgenden mögen das Prisma und der Zylinder besonders behandelt werden.

a) Das Prisma.

Die beiden parallelen ebenen Flächen heißen die Grundflächen des Prismas — (man spricht zuweilen von einer oberen und unteren); die übrigen Flächen heißen Seitenflächen.

Die Seiten der Grundflächen heißen die Grundkanten des Prismas, die übrigen Kanten sind seine Seitenkanten.

Die Entfernung der beiden Grundflächen voneinander heißt die Höhe des Prismas.

Die Seitenflächen eines Prismas sind Parallelogramme und die beiden Grundflächen kongruente Vielecke. Alle Seitenkanten des Prismas sind gleich lang (I, B, 3).

Die Kongruenz der Grundflächen wird bewiesen mittels der Sätze in I, B, 1 und 15.

Ein Prisma heißt ein n-seitiges, wenn es n-Seitenflächen hat, wenn also seine Grundflächen n-Ecke sind.

Jeder Parallelschnitt, d. h. jeder ebene Schnitt parallel den Grundflächen ist den Grundflächen kongruent; denn er bildet die obere und untere Grundfläche zweier neuer Prismen.

Unter einem Normalschnitt versteht man einen ebenen Schnitt, der senkrecht zu den Seitenkanten ist. Alle Normalschnitte sind kongruente Vielecke.

Schneidet man ein Prisma durch eine beliebige Ebene, welche alle Seitenkanten schneidet, so wird das Prisma in zwei schief abgeschnittene Prismen zerlegt.

Stehen bei einem Prisma die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht, so heißt es ein senkrechtes Prisma, im Gegensatz zum schiefen Prisma. Beim senkrechten Prisma sind die Seitenflächen Rechtecke, und die Höhe ist gleich den Seitenkanten.

Eine Ebene, die durch zwei nicht benachbarte Seitenkanten gelegt wird, heißt eine Diagonalebene; sie schneidet das Prisma in einem Parallelogramm.

Ein regelmäßiges Prisma ist ein senkrechtes, dessen Grundflächen regelmäßige Vielecke sind. Unter der Achse des regelmäßigen Prismas versteht man die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Grundflächen. Die Achse ist parallel den Seitenkanten und steht auf den Grundflächen senkrecht.

Die schiefen Prismen besitzen kein besonders einfaches Netz. Einfach ist das Netz der senkrechten Prismen. Man denkt sich bei letzteren die Oberfläche längs einer Seitenkante und an den Grundflächen längs den Grundkanten mit Ausnahme von je einer aufgeschnitten. Alle Seitenflächen zusammen breiten sich dann in die Ebene als ein Rechteck aus, dessen eine Seite gleich den Seitenkanten ist und dessen andere Seite gleich dem Umfang der Grundfläche ist. Zu dem Rechteck kommen noch die beiden Grundflächen hinzu.

Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelflach (auch Parallelepipedon). Alle seine sechs Flächen sind Parallelogramme; je zwei gegenüberliegende Parallelogramme sind kongruent und parallel und können als Grundflächen des Prismas angesehen werden (Figur 33).

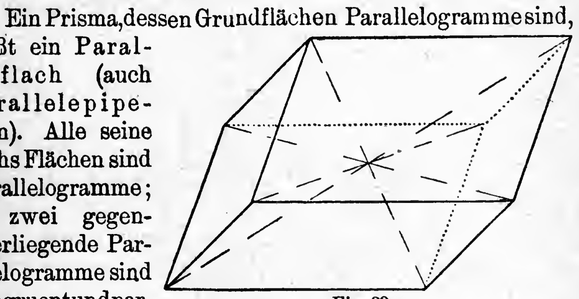


Fig. 33.

Die vier Diagonalen eines Parallelflaches schneiden sich in einem Punkt und halbieren sich gegenseitig. Dieser Satz

wird bewiesen, indem man die Diagonalschnitte betrachtet, in welchen die Diagonalen liegen.

Der Quader ist ein senkrechtes Parallelflach. Alle seine 6 Flächen sind Rechtecke; seine 4 Diagonalen sind gleich lang.

Der Würfel ist ein Quader, dessen Kanten gleich lang sind. Alle seine 6 Flächen sind kongruente Quadrate.

b) Der Zylinder.

Die Entstehungsweise des Zylinders ist oben besprochen worden.

Den Grundflächen des Prismas entsprechen die Grundflächen des Zylinders.

Die Parallelschnitte des Zylinders sind den Grundflächen kongruent.

Die Mantellinien des Zylinders entsprechen den Seitenkanten des Prismas. Alle Mantellinien des Zylinders sind gleich lang. Alle zusammen bilden die krumme Oberfläche des Zylinders, seinen Mantel.

Unter der Höhe des Zylinders versteht man den Abstand der beiden Grundflächen.

Der Mantel eines Zylinders läßt sich in die Ebene ausbreiten, wenn man ihn längs einer Mantellinie und längs der Grundflächen aufschneidet.

Schneidet man einen Zylinder mit einer Ebene, welche alle Mantellinien schneidet, so entstehen zwei schief abgeschnittene Zylinder.

Ein ebener Schnitt, der zu den Mantellinien senkrecht ist, heißt ein Normalschnitt des Zylinders. Alle Normalschnitte sind kongruent.

Ein Zylinder heißt im Gegensatz zum schiefen Zylinder ein senkrechter, wenn seine Mantellinien auf den Grundflächen senkrecht stehen.

Der Mantel eines solchen Zylinders breitet sich in die

Ebene als Rechteck aus, dessen eine Seite gleich der Mantellinie des Zylinders ist; die andere Seite ist gleich dem Umfang der Grundfläche.

Von besonderer Bedeutung ist der senkrechte Kreiszylinder. Seine Grundflächen sind Kreise. Er heißt oft kurz „Zylinder".

Die Achse des „Zylinders" verbindet die Mittelpunkte der beiden Grundkreise und steht auf diesen senkrecht.

Ein „Zylinder" wird erzeugt, indem man ein Rechteck um eine seiner Seiten als Achse dreht.

Ein Schnitt mit einer Ebene durch die Achse heißt Achsenschnitt; dieser ist ein Rechteck..

Jede Ebene, die parallel den Mantellinien eines beliebigen Zylinders ist, schneidet seinen Mantel nur nach Mantellinien.

Kommt es vor, daß zwei solche Mantellinien zusammenfallen, so sagt man: die Ebene berührt den Zylinder längs der Mantellinie. Die Ebene selbst heißt Berührungsebene. Jede Gerade, die in einer Berührungsebene liegt, berührt auch den Zylinder und heißt eine Tangente des Zylinders.

Man erhält eine beliebige Berührungsebene des senkrechten Kreiszylinders, indem man durch eine beliebige Mantellinie und die Achse eine Ebene legt und durch die Mantellinie eine zweite Ebene, die auf der ersten senkrecht steht. Diese zweite Ebene ist dann eine Berührungsebene. Legt man durch eine Tangente eines Grundkreises oder einer Grundfläche überhaupt und die durch den Berührungspunkt gehende Mantellinie eine Ebene, so erhält man ebenfalls eine Berührungsebene.

C. Die Pyramide und der Kegel.

Verbindet man alle Ecken eines ebenen Vielecks durch Gerade mit einem Punkt außerhalb der Ebene des Vielecks

und legt durch je zwei benachbarte Verbindungslinien eine Ebene, so erhält man ebene Flächen, die einen Körper begrenzen, welcher Pyramide heißt (Figur 34).

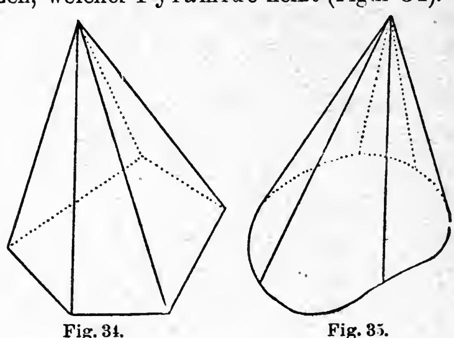


Fig. 34. Fig. 35.

Geht das Vieleck in eine krumme Linie über, so führt der Körper den Namen Kegel (Figur 35).

Das ebene Vieleck heißt die Grundfläche der Pyramide; auch beim Kegel spricht man von der Grundfläche.

Die Seitenflächen der Pyramide sind lauter Dreiecke. Wo zwei solche Dreiecke zusammenstoßen, entsteht eine Seitenkante.

Die Kanten an der Grundfläche heißen die Grundkanten.

Den Seitenkanten der Pyramide entsprechen beim Kegel seine Mantellinien. Alle Mantellinien bilden die krumme Oberfläche des Kegels, welche der Mantel heißt.

Der Punkt, durch den alle Seitenkanten der Pyramide bzw. alle Mantellinien des Kegels hindurchgehen, heißt die Spitze der Pyramide oder des Kegels. Die Entfernung der Spitze von der Grundfläche heißt die Höhe der Pyramide oder des Kegels.

Eine Pyramide heißt **n-seitig**, wenn sie n Seitenflächen besitzt, wenn also die Grundfläche ein n-Eck ist.

Eine Pyramide ist eine **regelmäßige**, wenn ihre Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist und ihre Spitze auf dem Lot liegt, das im Mittelpunkt des Vielecks auf seiner Ebene errichtet ist.

In einer regelmäßigen Pyramide sind alle Grundkanten gleich, ebenso alle Seitenkanten. Alle Seitenkanten haben gleiche Neigung gegen die Grundfläche. Die Seitenflächen sind lauter gleichschenklige Dreiecke, deren Ebenen gegen die Grundfläche gleiche Neigung haben.

Durch einen **Parallelschnitt**, d. h. durch einen Schnitt mit einer Ebene, die der Grundfläche einer Pyramide oder eines Kegels parallel ist, zerfallen diese Körper in zwei Teile. Der eine Teil ist wieder eine Pyramide oder ein Kegel und heißt die **Ergänzungspyramide** bzw. der **Ergänzungs-**

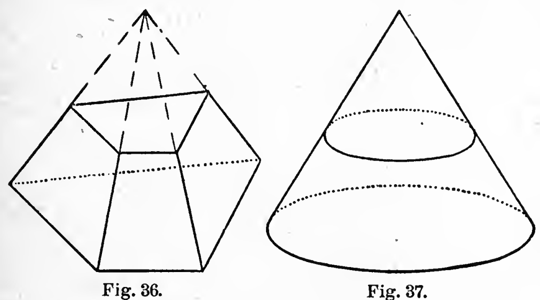


Fig. 36. Fig. 37.

kegel. Der andere Teil ist eine **abgestumpfte Pyramide** bzw. ein **abgestumpfter Kegel** (Figur 36 und 37).

Der Parallelschnitt ist die zweite Grundfläche der abgestumpften Pyramide oder des abgestumpften Kegels. Er ist der Grundfläche ähnlich. Der Beweis hierfür gründet sich auf I, B, 1, 4, 15.

Unter der Höhe dieser abgestumpften Körper versteht man den Abstand der beiden Grundflächen.

Bei der abgestumpften Pyramide spricht man ebenfalls von Seitenflächen (sie sind Trapeze) und von Seiten- und Grundkanten und beim abgestumpften Kegel von dem Mantel und den Mantellinien.

Die Seitenflächen der Pyramide und der Mantel des Kegels lassen sich in einem Stück in die Ebene ausbreiten. Dasselbe gilt für die abgestumpfte Pyramide und den abgestumpften Kegel. Man denke sich hier die Oberfläche nach dem Umfang der Grundflächen aufgeschnitten, ferner noch nach einer Seitenkante oder nach einer Mantellinie; dann gelingt die Ausbreitung in die Ebene.

Von besonderer Wichtigkeit ist derjenige Kegel, dessen Grundfläche ein Kreis ist und dessen Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt dieses Kreises liegt. Dieser Kegel heißt meist kurz „Kegel", auch gerader oder senkrechter Kreiskegel. Bei anderer Lage der Spitze heißt er ein schiefer Kreiskegel.

Der „Kegel" entsteht neben anderen Erzeugungsarten durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner Katheten. Hieraus folgt, daß alle Mantellinien des „Kegels" gleich lang sind.

Der Mantel des „Kegels" breitet sich in die Ebene als Kreisausschnitt aus, dessen Radius gleich der Mantellinie und dessen Bogen gleich dem Umfang des Grundkreises ist.

Die Ausbreitungsfigur eines „abgestumpften Kegels" ist ein Kreisringausschnitt. Die Dicke des Ringes ist gleich der Mantellinie des Kegels; die beiden Kreisbogen sind gleich den Umfängen der beiden Grundkreise.

Schneidet man den Mantel eines beliebigen Kegels mit einer Ebene, welche durch seine Spitze geht, so erhält man als Schnittfigur nur Mantellinien.

Es kann vorkommen, daß hierbei zwei Mantellinien zusammenfallen. Dann sagt man: die Ebene berührt den Kegel längs einer Mantellinie. Die Ebene heißt dann eine Berührungsebene des Kegels. Jede Gerade, welche in einer Berührungsebene liegt, berührt auch den Kegel und heißt eine Tangente des Kegels.

Um eine beliebige Berührungsebene eines Kegels zu erhalten, kann man so verfahren: Man ziehe an die Grundfläche eine beliebige Tangente, verbinde den Berührungspunkt mit der Spitze des Kegels und lege durch diese beiden Geraden eine Ebene. Diese Ebene ist dann eine Berührungsebene.

Eine Kegelfläche ist nicht durch Grundflächen abgeschlossen; bei ihr erstrecken sich die Mantellinien ins Unendliche, und zwar von der Spitze aus nach zwei Seiten.

D. Das Prismatoid.

Ein Prismatoid entsteht, wenn man die Ecken zweier beliebiger, in parallelen Ebenen liegender Vielecke gegenseitig so verbindet, daß ebene Vielecke (meistens sind es Dreiecke) entstehen, welche mit den beiden ersten Vielecken einen Körper begrenzen (Figur 38).

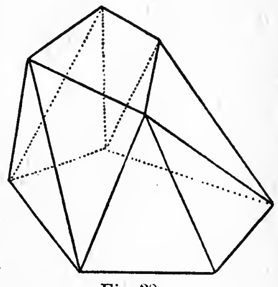


Fig. 38.

Die beiden Vielecke in den parallelen Ebenen heißen die Grundflächen des Prismatoids, die übrigen Flächen die Seitenflächen.

Unter der Höhe versteht man den Abstand der beiden Grundflächen.

Ein **Parallelschnitt** ist ein Schnitt mit einer Ebene parallel den Grundflächen. Der Parallelschnitt durch die Mitte der Höhe heißt der **Mittelschnitt** des Prismatoids.

Eine oder beide Grundflächen können auch in ebene Flächen mit krummer Begrenzung übergehen. Sie können auch zu einer Linie oder zu einem Punkt zusammenschrumpfen. So ist z. B. die Pyramide ein Prismatoid; ebenso der Kegel.

Auch das Prisma, die abgestumpfte Pyramide und der abgestumpfte Kegel gehören zu den Prismatoiden; ebenso ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma, bei welchem eine Grundfläche zu einer Geraden zusammengeschrumpft ist; als zweite Grundfläche ist die gegenüberliegende Seitenfläche anzusehen.

E. Die Umdrehungsflächen und Umdrehungskörper.

Dreht man irgend eine ebene Linie um eine Gerade, um eine **Achse**, die in der Ebene der Linie liegt, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so wird eine krumme Fläche erzeugt, die **Umdrehungsfläche** heißt.

Eine Umdrehungsfläche begrenzt einen **Umdrehungskörper**. Zur vollständigen Begrenzung eines Umdrehungskörpers können allerdings noch eine oder zwei (parallele) Kreisflächen hinzukommen.

Bei der Drehung einer ebenen Linie um eine Achse beschreibt jeder ihrer Punkte einen Kreis, dessen Ebene zur Achse senkrecht steht (I, B, 18). Da die Ebenen aller dieser Kreise parallel sind, so werden die Kreise selbst **Parallelkreise** genannt.

Unter einem **Achsenschnitt** oder **Meridian** versteht man den Schnitt mit einer Ebene, die durch die Drehachse geht. Alle Meridiane sind kongruent und jeder ist in bezug auf die Drehachse symmetrisch.

Dreht man mit der Linie eine Tangente der Linie, so erzeugt diese Tangente einen Kreiskegel, welcher die Umdrehungsfläche längs eines Kreises berührt und *Berührungskegel* heißt. Eine Ebene, welche diesen Kegel berührt, berührt auch die Umdrehungsfläche und heißt eine *Berührungsebene*.

Oben wurden schon genauer behandelt der Umdrehungszylinder, der Umdrehungskegel und der abgestumpfte Umdrehungskegel.

Eine weitere wichtige Umdrehungsfläche und ein Umdrehungskörper ist die Kugel (Figur 39).

Fig. 39.

Eine *Kugelfläche* entsteht, wenn ein Halbkreis sich um seinen Durchmesser dreht, bis er wieder in seine Anfangslage zurückkehrt. Die Kugelfläche begrenzt die massive *Kugel*.

Aus dieser Erzeugungsweise der Kugelfläche folgt, daß jeder Punkt der Fläche von einem festen Punkt, dem *Mittelpunkt* der Kugel, gleiche Entfernung hat. Diese Entfernungen heißen die *Halbmesser* oder *Radien* der Kugel; sie sind alle gleich und gleich dem Radius des erzeugenden Halbkreises.

Verlängert man einen Radius über den Mittelpunkt hinaus um sich selbst, so entsteht ein *Durchmesser* der Kugel. Alle Durchmesser sind somit gleich und gleich dem doppelten Radius.

Jede Ebene, welche eine Kugel schneidet, schneidet aus ihr einen Kreis aus. Denn fällt man vom Mittelpunkt

der Kugel aus auf die Ebene das Lot, und verbindet man irgend einen Punkt der Schnittfigur mit dem Mittelpunkt und dem Fußpunkt des Lotes, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck; alle auf diese Weise entstehenden rechtwinkligen Dreiecke aber sind kongruent, weil sämtliche in der Hypotenuse (Radius) und einer Kathete (Lot) übereinstimmen. Jeder Punkt der Schnittlinie hat somit vom Fußpunkt des Lotes gleiche Entfernung. Die Schnittlinie ist daher ein Kreis.

Ein ebener Schnitt zerlegt die Kugel in zwei Kugelabschnitte oder Kugelsegmente. Die Oberfläche eines Kugelabschnittes heißt Kugelkappe, Kugelhaube. Ebene Schnitte, die durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegt werden, teilen diese in zwei Halbkugeln.

Die Schnittfigur ist hier ein größter Kreis der Kugel, ein Großkreis. Die übrigen ebenen Schnitte ergeben ihre Kleinkreise.

Zwei Parallelkreise begrenzen eine Kugelzone.

Ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt einer Kugel liegt, schneidet aus dieser einen Kugelausschnitt oder Kugelsektor aus.

Eine Gerade kann eine Kugel nur in zwei Punkten schneiden. Denn eine beliebige Ebene durch die Gerade schneidet die Kugel nach einem Kreis, in welchem die Gerade Sekante ist. Eine Sekante schneidet aber einen Kreis nur in zwei Punkten. Fallen die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einer Kugel zusammen, dann ist die Gerade eine Tangente der Kugel und der gemeinschaftliche Punkt ein Berührungspunkt.

Eine Gerade, die eine Kugel schneidet, heißt eine Sekante der Kugel; geht diese Gerade durch den Mittelpunkt der Kugel, so heißt sie Zentrale. Das innerhalb einer Kugel liegende Stück einer Sekante heißt eine Sehne der Kugel.

Der Radius, der den Mittelpunkt einer Kugel mit dem Berührungspunkt einer Tangente verbindet, steht auf letzterer senkrecht. Denn die Tangente einer Kugel ist auch Tangente des Großkreises, dessen Ebene durch die Tangente geht.

An eine Kugel lassen sich in einem Punkt ihrer Oberfläche unendlich viele Tangenten legen; alle stehen auf dem Radius nach dem Berührungspunkt senkrecht und liegen somit in einer zu diesem Radius senkrechten Ebene. Diese Ebene heißt eine Berührungsebene der Kugel. Der Berührungspunkt der unendlich vielen Tangenten ist auch der Berührungspunkt der Berührungsebene.

Von einem beliebigen, aber festen Punkt außerhalb einer Kugel aus können an diese unendlich viele Tangenten gezogen werden. Sämtliche Tangenten bis zu ihren Berührungspunkten bilden die Mantellinien eines „Kegels", des Berührungskegels.

Man denke sich nämlich eine Tangente von dem festen Punkt aus an die Kugel gezogen und den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkt und dem festen Punkt verbunden. Dann entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Dreht man dieses Dreieck um seine Hypotenuse (die Zentrale), so erhält man alle übrigen Tangenten. Der Berührungspunkt beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Ebene auf der Zentrale senkrecht steht und dessen Mittelpunkt auf der Zentrale liegt. Alle Tangenten sind somit die Mantellinien eines „Kegels". Man erhält so zugleich den Satz: Alle Tangenten einer Kugel von einem festen Punkt aus bis zu den Berührungspunkten sind gleich.

Alle Tangenten einer Kugel, die auf demselben Großkreis senkrecht stehen, sind die Mantellinien eines „Zylinders". Dieser Zylinder berührt die Kugel und heißt Berührungszylinder der Kugel. Alle Tangenten einer

Kugel, die einer festen Geraden parallel sind, sind die Mantellinien eines Berührungszylinders.

Durch eine Gerade außerhalb einer Kugel können an diese nur zwei Berührungsebenen gelegt werden. Diese Ebenen werden erhalten, indem man durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene senkrecht zu der Geraden legt, und indem man dann vom Schnittpunkt dieser Ebene mit der Geraden aus an den ausgeschnittenen Großkreis die beiden Tangenten zieht und durch diese Tangenten und die Gerade die beiden Ebenen legt. Diese beiden Ebenen sind die verlangten Berührungsebenen.

Zwei Kugeln, die sich schneiden, schneiden sich nach einem Kreis. Denn die beiden Kugeln können erzeugt werden, indem man zwei sich schneidende Halbkreise um ihre gemeinschaftliche Zentrale dreht. Bei der Drehung aber beschreibt der Schnittpunkt der beiden Halbkreise einen Kreis, den Schnittkreis der beiden Kugeln. Seine Ebene steht auf der gemeinschaftlichen Zentrale senkrecht, und sein Mittelpunkt liegt auf dieser Zentrale.

Zwei Kugeln schneiden sich nicht, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte größer ist als die Summe der Radien der beiden Kugeln, oder wenn die Entfernung kleiner ist als die Differenz der Radien.

Zwei Kugeln berühren sich, wenn die Entfernung ihrer Mittelpunkte gleich der Summe oder gleich der Differenz ihrer Radien ist. Im ersten Falle berühren sie sich von außen, im zweiten von innen. Man erhält solche Kugeln durch Drehung zweier sich berührenden Kreise um ihre gemeinschaftliche Zentrale.

Zwei Kugeln, die sich nicht schneiden und die außerhalb einander liegen, werden von zwei „Kegeln“, einem inneren und einem äußeren, zugleich berührt. Die beiden Kegel heißen die gemeinschaftlichen Berührungskegel.

Man erhält diese Kegel, indem man durch die gemeinschaftliche Zentrale der beiden Kugeln eine Ebene legt und an die beiden ausgeschnittenen Großkreise die gemeinschaftlichen Tangenten zieht. Dreht man dann die ganze Figur um die gemeinschaftliche Zentrale, so werden sowohl die beiden Kugeln als auch ihre gemeinschaftlichen Berührungskegel erzeugt.

F. Die regelmäßigen Polyeder oder die Pythagoreischen, Platonischen Körper.

Ein Körper heißt regelmäßig, wenn seine Oberfläche aus lauter kongruenten regelmäßigen Vielecken besteht und wenn sich an jeder Ecke gleich viele Vielecke befinden.

Denkt man sich die Flächen, die sich an einer Ecke befinden, in eine Ebene so ausgebreitet, daß sie ein Stück bilden, so ist der Winkel, der an der Ecke gebildet wird, jedenfalls kleiner als 360^{0}. Da nun an jeder Ecke mindestens 3 Flächen zusammenstoßen, so muß der Winkel des in Betracht kommenden regelmäßigen Vielecks kleiner als 120^{0} sein. Es kann sich somit nur um das regelmäßige Dreieck, Viereck und Fünfeck handeln.

Beim regelmäßigen Dreieck sind 3 Fälle möglich: es können sich an einer Ecke 3, 4 oder 5 Dreiecke befinden.

Das regelmäßige Viereck und Fünfeck kann je nur einen Fall liefern.

Im ganzen sind also nur 5 regelmäßige Polyeder möglich. Diese sind:

1. Das Tetraeder. Seine 4 Flächen sind kongruente gleichseitige Dreiecke. Der Körper hat 4 Ecken und 6 Kanten (Figur 40).

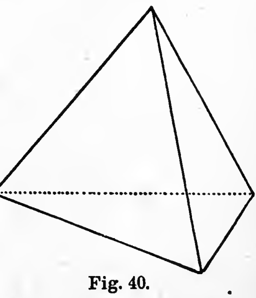


Fig. 40.

2. Der Würfel oder das Hexaeder mit 6 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten (Figur 41).

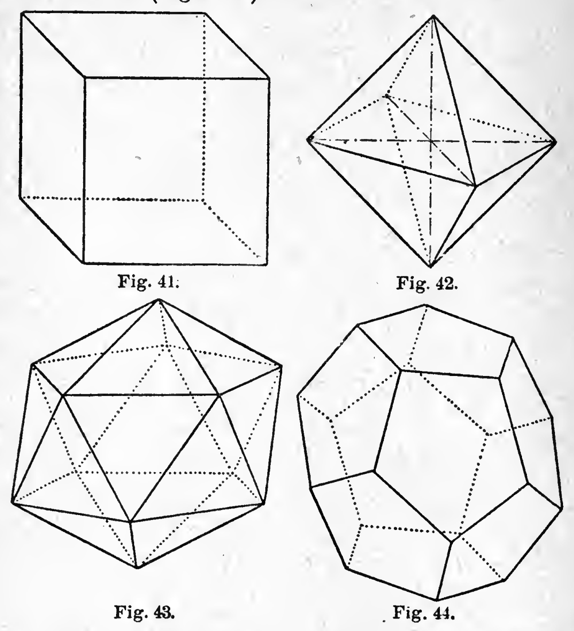


Fig. 41. Fig. 42.

Fig. 43. Fig. 44.

3. Das Oktaeder. Seine 8 Flächen sind kongruente gleichseitige Dreiecke. An einer Ecke befinden sich 4 solcher Dreiecke. Das Oktaeder hat 6 Ecken und 12 Kanten (Figur 42).

Man erhält ein Oktaeder, indem man die Endpunkte dreier gleich langen Achsen, die in ihren Mitten gegenseitig aufeinander senkrecht stehen, mit einander verbindet.

4. Das Ikosaeder. Seine Oberfläche besteht aus 20 kongruenten gleichseitigen Dreiecken. An einer Ecke stoßen

5 zusammen. Das Ikosaeder hat 12 Ecken und 30 Kanten (Figur 43).

5. Das Dodekaeder. Seine Oberfläche besteht aus 12 kongruenten regelmäßigen Fünfecken; an einer Ecke befinden sich 3 solcher Fünfecke. Die Anzahl der Ecken ist 20, die der Kanten 30 (Figur 44).

Um und in jedes regelmäßige Polyeder läßt sich eine Kugel beschreiben; beide Kugeln sind konzentrisch.

G. Das Dreikant und das sphärische Dreieck.

a) Allgemeines.

Drei Ebenen, die sich in einem Punkt schneiden, teilen den ganzen Raum in 8 Teile ein. Jeder dieser 8 Teile heißt ein Dreikant.

Der Schnittpunkt der drei Ebenen heißt die Spitze oder der Scheitel der Dreikante. Vom Scheitel eines Dreikants aus gehen seine drei Kanten. Die ebene Fläche zwischen zwei Kanten heißt eine Seitenfläche des Dreikants und der Winkel zwischen zwei Kanten eine Seite des Dreikants. Ein Dreikant besitzt drei Seitenflächen und drei Seiten (Figur 45).

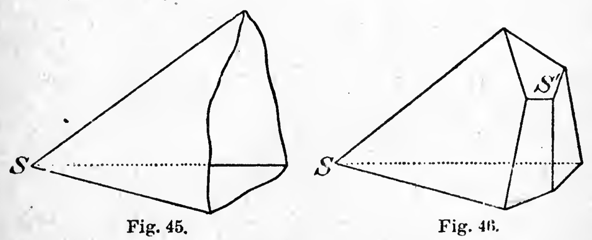


Fig. 45. Fig. 46.

Der Neigungswinkel zweier Seitenflächen heißt ein Kantenwinkel oder kurz ein Winkel des Dreikants. Ein Dreikant besitzt drei Winkel.

Die Verlängerungen der Kanten eines Dreikants über den Scheitel hinaus bilden ein neues Dreikant, das Scheiteldreikant des ursprünglichen.

Beide Dreikante haben gleiche Seiten und gleiche Winkel; sie sind aber nicht kongruent, sondern symmetrisch in bezug auf einen Punkt, den gemeinschaftlichen Scheitel, und somit symmetrisch in bezug auf eine Ebene. Zwei symmetrische Dreikante stimmen stets in den Seiten und Winkeln überein.

Zwei Kanten eines Dreikants und die Verlängerung der dritten über den Scheitel hinaus bestimmen ein Nebendreikant des ursprünglichen. Es hat mit letzterem eine Seite gemeinschaftlich, während die beiden anderen die Supplemente der Seiten des ursprünglichen sind.

Fällt man von einem beliebigen Punkt S' im Innern eines Dreikants auf seine drei Seitenflächen Lote, so sind diese die Kanten eines neuen Dreikants, des Polardreikants des ursprünglichen (Figur 46). Das eine Dreikant ist das Polardreikant des anderen (I, B, 32 und 35). Alle Polardreikante, die zu einem gegebenen Dreikant konstruiert werden können, sind kongruent (I, B, 28 und 15).

Im folgenden mögen die Seitenflächen und zugleich auch die Seiten eines Dreikants mit a, b, c bezeichnet werden und die den Seiten gegenüberliegenden Winkel bzw. mit α, β, γ; die entsprechenden Bezeichnungen für das zugehörige Polardreikant seien a', b', c', α', β', γ'; dabei liege α in der Ebene von a', β in der Ebene von b', γ in der Ebene von c'. Dann erhält man folgende Beziehungen:

$$\alpha + a' = \beta + b' = \gamma + c' = \alpha' + a$$
$$= \beta' + b = \gamma' + c = 2R.$$

Beschreibt man um den Scheitel eines Dreikants als Mittelpunkt mit beliebigem Radius eine Kugel, so schließen die Großkreisbögen, in welchen die Seitenflächen des Drei-

kants die Kugel schneiden, ein sphärisches Dreieck ein. Dieses liegt ganz auf der Kugeloberfläche.

In der Figur 39 befinden sich sphärische Dreiecke. Zu einem Polardreikant gehört auch ein sphärisches Polardreieck. Die Großkreisbogen, welche ein sphärisches Dreieck begrenzen, heißen seine Seiten. Sie werden, wie die Seiten des Dreikants, gewöhnlich in Graden, Minuten und Sekunden gemessen.

Die Winkel des sphärischen Dreiecks sind den Winkeln seines Dreikants gleich. Ein Winkel eines sphärischen Dreiecks nämlich wird gemessen durch den Winkel, den die beiden Tangenten einschließen, welche in einer Ecke des Dreiecks an die durch sie gehenden Großkreisbögen gezogen werden. Diese Tangenten aber liegen in den Seitenflächen des Dreikants und stehen auf der Kante senkrecht.

Jedem Dreikant entsprechen unendlich viele sphärische Dreiecke, die alle dieselben Seiten und Winkel haben, ohne kongruent zu sein; alle sind ähnliche Dreiecke. Jedem sphärischen Dreieck entspricht ein bestimmtes Dreikant. Man erhält dieses, wenn man die Ecken des Dreiecks mit dem Mittelpunkt seiner zugehörigen Kugel durch Gerade verbindet. Dem Scheiteldreikant entspricht das sphärische Scheiteldreieck, dem Nebendreikant das sphärische Nebendreieck. Zwei Scheiteldreiecke sind, wie ihre zugehörigen Dreikante, gegenseitig symmetrisch.

Ein Dreikant oder ein sphärisches Dreieck heißt rechtwinklig, wenn einer der drei Winkel ein rechter ist; gleichschenkelig, wenn zwei Seiten gleich sind; gleichseitig, wenn alle drei Seiten gleich sind.

Da ein sphärisches Dreieck dieselben Seiten und Winkel besitzt wie sein zugehöriges Dreikant, so ergeben sich aus den Sätzen über das Dreikant unmittelbar entsprechende für das sphärische Dreieck.

b) Konstruktionsaufgaben, Lehrsätze und Erklärungen.

1. Aufgabe.

Ein Dreikant aus seinen drei Seiten a, b, c zu konstruieren und seine drei Winkel zu bestimmen (Figur 47).

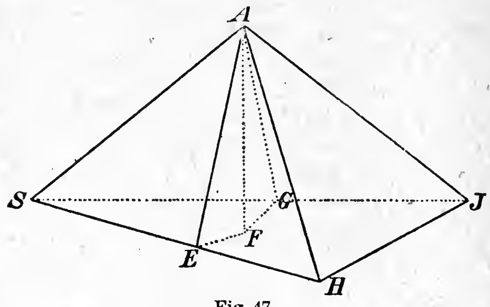


Fig. 47.

Fällt man von einem beliebigen Punkt einer Kante eines Dreikants aus auf die beiden anderen Kanten und auf die gegenüberliegende Seitenfläche SHJ die Lote AE, AG, AF und zieht FE und FG, so erhält man einen Körper $SAEFG$, dessen Netz zu konstruieren ist. Dieses Netz setzt sich aus den vier rechtwinkligen Dreiecken SAE, SAG, AFE und AFG und dem Viereck $SEFG$ zusammen. Letzteres hat bei E und G rechte Winkel (I, B, 43).

Die Winkel AEF und AGF der Dreiecke AEF und AGF sind zwei Winkel des Dreikants. Der dritte Winkel wird gefunden, indem man in A auf SA die Lote AH und AJ errichtet, die in den Ebenen SAE und SAG liegen. Diese beiden Lote schließen den dritten Winkel ein.

Man erhält so folgende Konstruktion des genannten Netzes und der Winkel des Dreikants (Figur 48).

Man lege die drei Winkel a, b, c, des Dreikants aneinander an, mache $SA = SB$, fälle die Lote BF und AF,

errichte auf EF das Lot FD und auf FG das Lot FC und mache $ED = EB$, $CG = AG$. $SAGCFDEBS$ ist dann das gesuchte Netz und $\sphericalangle CGF$ der gesuchte Winkel β, $\sphericalangle DEF$ der gesuchte Winkel γ. Macht man HK gleich dem Lot HB und JK gleich dem Lot JA, so ist der Winkel HKJ der gesuchte Winkel α.

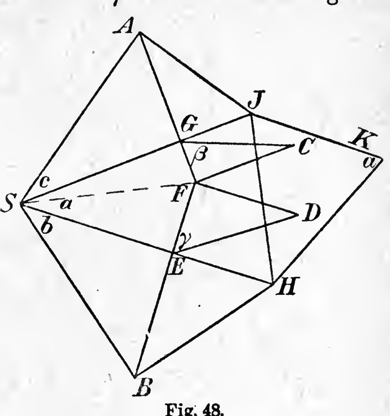


Fig. 48.

Will man das Dreikant aus den drei Seiten a, b, c selbst herstellen, so hat man in F auf der Ebene von a das Lot zu errichten und gleich $FC = FD$ zu machen. Der Endpunkt A des Lotes ist dann noch mit S zu verbinden.

Da man in F nach zwei Richtungen hin auf der Ebene von a Lote gleich FC errichten kann, so erhält man zwei Dreikante mit den Seiten a, b, c. Die beiden Dreikante, die in dieser Weise erhalten werden, sind nicht kongruent, sondern symmetrisch in bezug auf die Ebene von a, weil die beiden Seiten b und die beiden Seiten c gegen a die gleiche Neigung β und γ haben.

Weil unsere Konstruktion nur zwei Dreikante ergibt, so folgt folgender Lehrsatz:

2. Lehrsatz.

Zwei Dreikante oder zwei sphärische Dreiecke, die auf derselben Kugel liegen, sind kongruent oder symmetrisch, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Die Konstruktion eines Dreikants aus den Seiten a, b, c ist nicht mehr möglich, wenn $GC < GF$ und $ED < EF$ wird, wenn daher auch $\triangle SAG < \triangle SFG$ und $\triangle SBE < \triangle SFE$ ist. Es muß also immer $\triangle SAG + \triangle SBE > \triangle SFG + \triangle SFE$ sein oder $b + c > a$ sein.

Man erhält so den Satz:

3. Lehrsatz.

In jedem Dreikant oder sphärischen Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Die Seiten eines Nebendreikants des vorliegenden Dreikants seien a, $2R - b$, $2R - c$; dann ist (Satz 3):

$$a < 2R - b + 2R - c \quad \text{oder:}$$
$$a + b + c < 4R.$$

Man erhält so den Satz:

4. Lehrsatz.

In jedem Dreikant oder sphärischen Dreieck ist die Summe der drei Seiten kleiner als $4R$. Sie liegt zwischen 0^0 und 360^0.

Für ein Dreikant und für sein zugehöriges Polardreikant bestehen die Beziehungen:

$$a + b + c + \alpha' + \beta' + \gamma' = 6R \quad \text{und}$$
$$0 < a + b + c < 4R, \quad \text{hieraus folgt:}$$
$$2R < \alpha' + \beta' + \gamma' < 6R.$$

Man hat so den Satz:

5. Lehrsatz.

In jedem Dreikant oder sphärischen Dreieck ist die Summe der drei Winkel größer als $2R$ und kleiner als $6R$. Sie liegt zwischen 180^0 und 540^0.

Ist in der Figur 48 $b > c$, so ist auch $BE > AG$ und

$ED > GC$. Weil ferner $FC = FD$ ist, so folgt $\sphericalangle \beta > \sphericalangle \gamma$. Ist ferner $\sphericalangle \beta > \sphericalangle \gamma$, so ist auch $b > c$.

Man hat somit die beiden Sätze:

6. Lehrsatz.

In jedem Dreikant oder sphärischen Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.

7. Lehrsatz.

In jedem Dreikant oder sphärischen Dreieck liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Aus den Sätzen 6 und 7 folgen die zwei weiteren:

8. Lehrsatz.

Im gleichschenkligen Dreikant oder im gleichschenkligen sphärischen Dreieck sind zwei Winkel gleich. Sind alle drei Seiten gleich, so sind auch alle drei Winkel gleich.

9. Lehrsatz.

Sind in einem Dreikant oder in einem sphärischen Dreieck zwei Winkel gleich, so ist es gleichschenklig.

10. Aufgabe.

Ein Dreikant aus den Seiten a und b und dem eingeschlossenen Winkel γ zu konstruieren und die übrigen Stücke zu bestimmen.

Man lege in Figur 48 die Seiten a und b aneinander an, fälle von B aus das Lot BE, mache $\sphericalangle DEF = \sphericalangle \gamma$ und $ED = EB$; fälle das Lot DF und von F aus das Lot FG und mache die Verlängerung $GA = GC$, verbinde A mit S. ASG ist dann die dritte Seite c und Winkel CFG der gesuchte Winkel β. Der Winkel α wird erhalten

wie in Aufgabe 1; ebenso die beiden symmetrischen Dreikante.

Weil das Netz nur zwei symmetrische Dreikante ergibt, so folgt:

11. Lehrsatz.

Zwei Dreikante oder zwei sphärische Dreiecke sind kongruent oder symmetrisch, wenn sie in zwei Seiten und in dem von diesen eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

12. Aufgabe.

Ein Dreikant zu konstruieren aus einer Seite a und den beiden anliegenden Winkeln β und γ und die übrigen Stücke zu bestimmen. Figur 48.

Man konstruiere zwei rechtwinklige Dreiecke, welche eine Kathete gleich haben, und in welchen die Winkel, die dieser Kathete gegenüberliegen, gleich β und γ sind; dann ziehe man zu den Schenkel der Seite a Parallelen, deren Abstand gleich den beiden anderen Katheten der rechtwinkligen Dreiecke ist. Man erhält so wie in der Figur 48 den Schnittpunkt F der beiden Parallelen. Von F aus fälle man die Lote FG und FE, mache die Verlängerungen GA und EB bzw. gleich den Hypotenusen GC und ED der beiden konstruierten rechtwinkligen Dreiecke FCG und FDE, verbinde A und B mit S; dann ist ESB die Seite b, GSA die Seite c. Die weitere Konstruktion wird wie in Aufgabe 1 ausgeführt.

Weil das Netz wieder nur zwei symmetrische Dreikante bestimmt, so folgt der Satz:

13. Lehrsatz.

Zwei Dreikante oder zwei sphärische Dreiecke sind

kongruent oder symmetrisch, wenn sie in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

14. Aufgabe.

Ein Dreikant aus den drei Winkeln α, β, γ zu konstruieren und die drei Seiten zu bestimmen.

Man konstruiere zu dem gesuchten Dreikant nach Aufgabe 1 sein zugehöriges Polardreikant, dessen Seiten gleich $2R - \alpha$, $2R - \beta$, $2R - \gamma$ sind. Die Winkel dieses Dreikants sind dann die Supplemente der Seiten des gesuchten Dreikants. Das Dreikant selbst wird dann wie in Aufgabe 1 konstruiert.

Auch hier erhält man nur zwei symmetrische Dreikante, woraus der Satz folgt:

15. Lehrsatz.

Zwei Dreikante oder zwei sphärische Dreiecke sind kongruent oder symmetrisch, wenn sie in den drei Winkeln übereinstimmen.

16. Lehrsatz.

Gleichschenklige Dreikante und sphärische Dreiecke, welche symmetrisch zueinander sind, sind kongruent.

Solche zwei symmetrische Dreikante nämlich lassen sich, wie leicht einzusehen ist, zur Deckung bringen.

17. Lehrsatz.

L e g t m a n d u r c h d i e H a l b i e r u n g s l i n i e jeder Seite e i n e s D r e i k a n t s d i e E b e n e s e n k r e c h t z u d i e s e r Seite, s o s c h n e i d e n s i c h d i e s e d r e i E b e n e n n a c h d e r s e l b e n Geraden.

Denn legt man durch die Schnittgerade zweier solcher Ebenen und durch die drei Kanten Ebenen und eine weitere,

die die dritte Seite halbiert, so wird das Dreikant durch diese sechs Ebenen in sechs rechtwinklige Dreikante geteilt, von welchen drei Paare symmetrisch sind (Satz 11 und 2). Hieraus folgt, daß auch die letzte Ebene auf der dritten Seite senkrecht steht. Die drei Ebenen gehen somit durch dieselbe Gerade.

Diese Gerade ist die Achse des dem Dreikant umbeschriebenen „Kreiskegels", d. h. des durch die drei Kanten gehenden „Kegels". Die drei Ebenen durch die Achse und die Kanten des Dreikants teilen nämlich das Dreikant in drei gleichschenklige Dreikante ein, deren Schenkel alle gleich sind.

18. Lehrsatz.

Die drei Ebenen, welche die Winkel eines Dreikants halbieren (Medianebenen), schneiden sich nach derselben Geraden.

Beweis. Man denke sich durch die Schnittgerade zweier solcher Ebenen und die dritte Kante eine Ebene gelegt, so halbiert diese auch den dritten Winkel (I, C, 12, 14).

Die gemeinschaftliche Gerade ist die Achse des dem Dreikant einbeschriebenen, d. h. seine Seiten berührenden „Kreiskegels".

19. Lehrsatz.

Legt man durch jede Kante eines Dreikants eine Ebene senkrecht zu der gegenüberliegenden Seitenfläche, so schneiden sich diese drei Ebenen, Höhen genannt, nach derselben Geraden.

Zum Beweis lege man eine zu einer Kante senkrechte Ebene. Diese Ebene schneidet aus dem Dreikant ein Dreieck aus, in welchem die drei Schnittgeraden mit den drei anderen Ebenen Höhen sind (Figur 49).

Ist nämlich S die Spitze des Dreikantes und $AB \perp AS$, $AC \perp AS$, so wird die durch die Kante SB gehende Höhe erhalten, indem man $BE \perp AC$ zieht und durch SB und BE die Ebene hindurchlegt (I, B, 32, 31). Ebenso geht die Höhe von SAB durch SC und durch $CF \perp AB$. Die dritte Höhe SAD ist $\perp ABC$ und $\perp SBC$; folglich ist $BD \perp SAD$ und daher $AD \perp BC$. Da nun die drei Höhen des Dreiecks ABC durch denselben Punkt gehen, so schneiden sich die drei Dreikantshöhen nach derselben Geraden SH (I, A, 6, a).

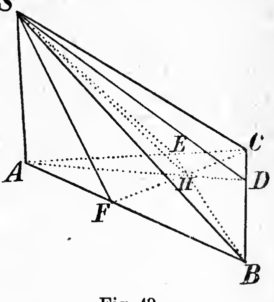


Fig. 49.

Anmerkung. Dem umbeschriebenen Kreiskegel eines Dreikantes entspricht der umbeschriebene Kreis des zugehörigen sphärischen Dreiecks. Ebenso gehört zu dem einbeschriebenen Kegel der einbeschriebene Kreis des Dreiecks. Die Höhen des Dreikants liefern die Höhen des sphärischen Dreiecks; sie sind Großkreisbögen.

20. Erklärung.

Unter der sphärischen Entfernung zweier Punkte einer Kugelfläche versteht man den kleineren der beiden Bögen des Großkreises der Kugel, der durch die beiden Punkte geht.

21. Lehrsatz.

Die sphärische Entfernung ist der kürzeste Weg, auf dem man von einem Punkt einer Kugelfläche auf dieser zu einem andern gelangen kann.

Denn jeder andere Linienzug, der zwei Punkte einer Kugelfläche verbindet, besteht aus unendlich vielen und unendlich kleinen Bögen von Großkreisen. Aus dem Satz

daß in einem sphärischen Dreieck die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte, folgt dann der ausgesprochene Satz.

22. Lehrsatz.

Zwei symmetrische sphärische Dreiecke haben denselben Flächeninhalt.

Zwei Scheiteldreikante nämlich sind symmetrisch und besitzen denselben umbeschriebenen Kreiskegel. Legt man durch die Achse dieses Kegels und die Kanten Ebenen, so werden die Dreikante in gleichschenklige Dreikante geteilt, von welchen drei Paare symmetrisch und daher auch kongruent sind. Zwei symmetrische sphärische Dreiecke lassen sich somit in drei Paare kongruenter sphärischer Dreiecke zerlegen und sind somit inhaltsgleich.

23. Erklärung.

Unter dem sphärischen Exzeß eines sphärischen Dreiecks versteht man den Überschuß der drei Winkel über 180^0. Er wird in Graden gemessen.

24. Lehrsatz.

Bezeichnet man den sphärischen Exzeß eines sphärischen Dreiecks mit E^0, den Flächeninhalt der Kugelfläche mit O, so ist der Flächeninhalt F des sphärischen Dreiecks:

$$F = \frac{O \cdot E^0}{720^0}.$$

Es ist nämlich (Figur 50):

$$\triangle ABC + \triangle DBC = \frac{O \cdot \alpha^0}{360^0}, \quad (1)$$

$$\triangle ABC + \triangle ACE = \frac{O \cdot \beta^0}{360^0}, \quad (2)$$

$$\triangle ABC + \triangle ABF = \frac{O \cdot \gamma^0}{360^0} \quad \text{und} \quad (3)$$

$$\triangle ABC + \triangle DBC + \triangle ACE + \triangle ABF = \frac{1}{2} O, \quad (4)$$

weil nach Satz 22 $\triangle DBC = \triangle AEF$ ist.

Durch Addition der Gleichungen (1), (2), (3) und Subtraktion von Gleichung (4) folgt:

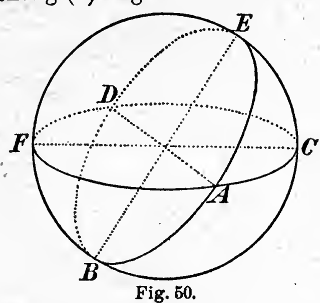


Fig. 50.

$$2.\ \triangle ABC = \frac{O(\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0)}{360^0} - \frac{1}{2} O,$$

$$\triangle ABC = \frac{O(\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 - 180^0)}{720^0} = \frac{OE^0}{720^0}.$$

H. Aufgaben und Lehrsätze.

1. Das Netz eines dreiseitigen schiefen Prismas zu konstruieren (Figur 1a).

Lösung. Man denke sich die Oberfläche längs einer Seitenkante und längs zwei Grundkanten in jeder Grundfläche aufgeschnitten und dann zwei Seitenflächen in die Ebene der dritten gedreht. Die beiden Verbindungsstrecken der beiden Paare von Punkten, welche die Endpunkte der genannten Seitenkante sind, müssen dann auf den beiden Kanten, längs welchen nicht aufgeschnitten wurde, senkrecht stehen (I, B, 18, 16, 27).

2. Das Netz eines beliebigen schiefen Prismas zu konstruieren.

Lösung. Man stelle das Prisma derart dar, daß seine Seitenkanten $\perp P_1$ und seine Grundflächen $\perp P_2$ sind. Im

Aufriß sind dann die letzteren Strecken, während die Grundrisse zusammenfallen und kongruent den Normalschnitten sind. Aus einem Normalschnitt, der parallel P_1 ist und jede Seitenfläche in zwei Trapeze mit rechten Winkeln teilt, ist dann zunächst der Mantel des Prismas leicht zu konstruieren, weil die Grundlinien der Trapeze in P_2 in wahrer Größe vorkommen.

3. Wo liegt der Schwerpunkt eines Prismas oder Zylinders?

Antwort: In der Mitte der Strecke, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet. (Man denke an sämtliche Parallelschnitte.)

4. Wo liegt der Schwerpunkt des Mantels eines Prismas oder eines Zylinders?

Antwort: In der Mitte der Strecke, welche die Schwerpunkte der Umfänge der beiden Grundflächen verbindet. (Man denke an sämtliche Parallelschnitte.)

5. Durch einen gegebenen Punkt außerhalb eines Kreiszylinders an ihn die beiden Berührungsebenen zu legen.

Lösung: Ziehe durch den Punkt die Parallele zu den Mantellinien bis zum Schnittpunkt mit einer Grundkreisebene. Von diesem Punkt aus ziehe an den Grundkreis die beiden Tangenten. Diese und die Parallele bestimmen die beiden Berührungsebenen.

6. Die Länge d der Diagonale eines Quaders in seinen drei Kanten a, b, c auszudrücken; ebenso seine Oberfläche O.
[$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $O = 2(ab + ac + bc)$.]

7. Das Netz eines Parallelflachs zu konstruieren.

8. Schneidet man ein Prisma oder einen Zylinder mit einer beliebigen Ebene, so liegt der Schwerpunkt der Schnittfläche auf der Verbindungsstrecke der Schwerpunkte, welche zu den Grundflächen gehören.

Beweis. Man führe ihn zunächst für das dreiseitige Prisma und schließe dann auf das vierseitige, fünfseitige usf.

9. Wie verhält sich der Flächeninhalt F einer ebenen Fläche zu dem ihrer senkrechten Projektion P auf eine Ebene, wenn der Neigungswinkel beider Ebenen gleich α ist?

Antwort: Es ist $P = F \cos\alpha$.

Beweis. Man führe ihn zunächst für ein Dreieck, dessen Grundlinie g parallel der Schnittgeraden der beiden Ebenen ist. Diese projiziert sich dann in wahrer Größe. Ist die Höhe des Dreiecks gleich H und die Projektion der Höhe gleich h, so ist $h = H \cos\alpha$. Es ist also hier $2P = gh$ und $2F = gH$; $2P = gH \cos\alpha = 2F \cos\alpha$; daher $P = F \cos\alpha$.

Jede ebene Fläche aber läßt sich in eine Anzahl solcher Dreiecke zerlegen, und es ist dann:
$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$; $F = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$;
$P_1 = F_1 \cos\alpha$; $P_2 = F_2 \cos\alpha$; $P_3 = F_3 \cos\alpha \ldots$,
folglich $P = F \cos\alpha$.

10. Das Netz einer Pyramide zu konstruieren.

Anleitung: Man denke sich die Oberfläche der Pyramide nach den Seitenkanten aufgeschnitten und die Seitenflächen um die Grundkanten in die Ebene der Grundfläche gedreht. Die Ecken der Seitenflächen beschreiben bei dieser Drehung Kreise, deren Ebenen auf der Grundfläche senkrecht stehen und durch die Höhe der Pyramide gehen. Die Radien der Kreise sind die Höhen der Seitenflächen. Die Verlängerungen dieser Höhen gehen nach der Drehung durch den Fußpunkt der Pyramidenhöhe hindurch. Dies ist bei der Konstruktion des Netzes zu berücksichtigen.

11. Die Schwerpunkte aller Parallelschnitte einer Pyramide oder eines Kegels liegen auf der Strecke, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbin-

det. Dies gilt sowohl für die Flächenschwerpunkte, als auch für die Umfangsschwerpunkte.

Beweis. Man führe ihn zunächst für eine dreiseitige Pyramide und schließe dann auf eine beliebige Pyramide oder Kegel.

12. Die vier Strecken, welche die vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide mit den vier Flächenschwerpunkten der gegenüberliegenden Dreiecke verbinden, schneiden sich in einem Punkt und teilen sich gegenseitig im Verhältnis 1:3. Dieser Punkt ist der Schwerpunkt der Pyramide.

Beweis. Zwei Strecken nämlich liegen immer in einer Ebene, die durch eine Kante und die Mitte der gegenüberliegenden Kante geht. Diese Ebene schneidet aus der Pyramide ein Dreieck aus, in welchem die beiden Strecken zwei Seiten im Verhältnis 1:2 teilen. Man erkennt dann, daß die Strecken selbst einander im Verhältnis 1:3 teilen.

13. Aus 11 und 12 folgt: Der Schwerpunkt einer massiven Pyramide oder eines Kegels liegt auf der Strecke, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt der Grundfläche verbindet und teilt diese Strecke im Verhältnis 1:3. (Der Schwerpunkt liegt näher an der Grundfläche als an der Spitze.)

14. Wo liegt der Schwerpunkt des Mantels einer Pyramide oder eines Kegels?

Antwort: Auf der Strecke, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt des Umfanges der Grundfläche verbindet. Er teilt diese Strecke im Verhältnis 1:2. Beweis hierfür! (Die Schwerpunkte der Seitenflächen liegen in einer zur Grundfläche parallelen Ebene.)

15. Durch einen Punkt außerhalb eines Kreiskegels an diesen beide Berührungsebenen zu legen.

Man verbinde die Spitze des Kegels mit dem gegebenen Punkt und schneide mit dieser Geraden die Ebene des

Grundkreises. Von dem Schnittpunkt aus lege man an den Grundkreis die beiden Tangenten und durch diese und die erste Gerade Ebenen. Diese beiden Ebenen sind die gesuchten Berührungsebenen.

16. Durch vier Punkte eine Kugelfläche zu legen.

Die vier Punkte bestimmen die vier Seiten einer dreiseitigen Pyramide. Man hat dann in den Mittelpunkten der diesen Seiten umbeschriebenen Kreise auf den Seiten die Lote zu errichten. Alle vier Lote schneiden sich in einem Punkt, dem Mittelpunkt der gesuchten Kugel; man erhält so zugleich den Radius der Kugel.

17. Den Durchmesser einer massiven Kugel zu bestimmen.

Man zeichne auf die Kugel einen beliebigen Kleinkreis, was mit Hilfe des Zirkels geschehen kann (wie und warum?).

Von diesem Kleinkreis bestimme man den Radius, indem man auf ihm drei Punkte beliebig annimmt und in der Ebene das durch diese Punkte bestimmte ebene Dreieck zeichnet. Der Umkreis dieses Dreiecks ist dem Kleinkreis gleich. Aus der Zirkelöffnung, mit welcher der Kleinkreis auf der Kugel beschrieben wurde, zeichne man als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Radius des Kleinkreises Kathete ist. In der Ecke dieser beiden Seiten errichte man auf der Hypotenuse das Lot. Die Hypotenuse des so entstehenden größten rechtwinkligen Dreiecks ist der gesuchte Durchmesser der Kugel.

18. Durch zwei Punkte einer massiven Kugel den Großkreis zu legen.

Man erhält weitere Punkte des Großkreises, indem man um die gegebenen Punkte auf die Kugelfäche Kreise zeichnet. Beschreibt man um die Schnittpunkte dieser Kreise mit beliebigem, aber gleichem Radius Kreise, so sind die Schnitt-

punkte der letzteren Punkte des Großkreises. Es kann dann auch der Radius der Kugel bestimmt werden. Beschreibt man mit der Quadrantensehne des Großkreises um die gegebenen Punkte Kreise, so erhält man zwei Schnittpunkte. Der um den einen Schnittpunkt mit der Sehne beschriebene Kreis ist der gesuchte Großkreis.

In einem rechtwinkligen Dreikant oder sphärischen Dreieck mögen die beiden Katheten, d. h. die Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, mit a und b bezeichnet werden, die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel mit α und β und die dritte Seite, die Hypotenuse, mit c. Man kann dann folgendes verlangen:

19. Ein rechtwinkliges Dreikant zu konstruieren aus a und c.

Konstruktion: In der Figur 51 sei ASB die Hypotenuse c, CBS die Kathete a. Ziehe $ABC \perp SB$, $CD \perp BC$, $CE \perp SC$. Mache $BD = AB$, $CE = CD$. Man erhält so das Netz des Dreikantes. Um α zu erhalten, ziehe $AF \perp AS$, $EG \perp ES$; mache $FH = FA$ und $GH = GE$. Es ist dann $\sphericalangle FHG = \alpha$. Aus der Konstruktion folgt der Satz:

Fig. 51.

20. Zwei rechtwinklige Dreikante oder sphärische Dreiecke sind kongruent oder symmetrisch, wenn sie in der Hypotenuse und einer Kathete übereinstimmen.

21. Ein rechtwinkliges Dreikant aus b und β zu konstruieren.

Die Konstruktion kann aus der Figur 51 abgelesen werden. Kongruenz- bzw. Symmetriesatz!

22. Ein rechtwinkliges Dreikant aus c und β zu konstruieren. Kongruenz- bzw. Symmetriesatz! Die Konstruktion aus der Figur 51 ablesen.

Anmerkung. Die übrigen drei Fälle (a, b; α, β; a, β) über das rechtwinklige Dreikant schließen die behandelten Fälle des gewöhnlichen Dreikants ein.

Man erhält so den Satz:

Zwei rechtwinklige Dreikante oder sphärische Dreiecke sind kongruent oder symmetrisch, wenn sie in zwei von den Stücken a, b, c, α, β übereinstimmen.

23. Den geometrischen Ort der Punkte zu bestimmen, welche von zwei gegebenen sich schneidenden Geraden gleiche Entfernungen haben.

Er wird von zwei Ebenen gebildet, welche durch die Winkelhalbierenden der beiden Geraden gehen und auf der Ebene der Geraden senkrecht stehen. (Beweis mit Hilfe des Nachweises der Symmetrie von zwei rechtwinkligen Dreikanten.)

24. Die Mitten der Kanten eines regelmäßigen Tetraeders sind die Ecken eines regelmäßigen Oktaeders.

25. Die Mitten der Seiten eines Würfels sind die Ecken eines Oktaeders.

26. Die Mitten der Seiten eines Oktaeders sind die Ecken eines Würfels.

27. Die Mitten der Seiten eines Ikosaeders sind die Ecken eines Dodekaeders.

28. Die Mitten der Seiten eines Dodekaeders sind die Ecken eines Ikosaeders.

29. Es sei zwei gleich großen, sich nicht schneidenden Kugeln ihr gemeinschaftlicher Berührungszylinder umschrieben und dieser Zylinder mit einer Ebene geschnitten,

welche beide Kugeln in den Punkten F und F_1 berührt. Verbindet man nun einen beliebigen Punkt X der Schnittlinie mit den beiden Punkten F und F_1 so sind XF und XF_1 Tangenten an diesen beiden Kugeln. Zieht man ferner durch X die Mantellinie XAB, so ist $XF = XA$ und $XF_1 = XB$, folglich $XF + XF_1 = XA + XB$ gleich

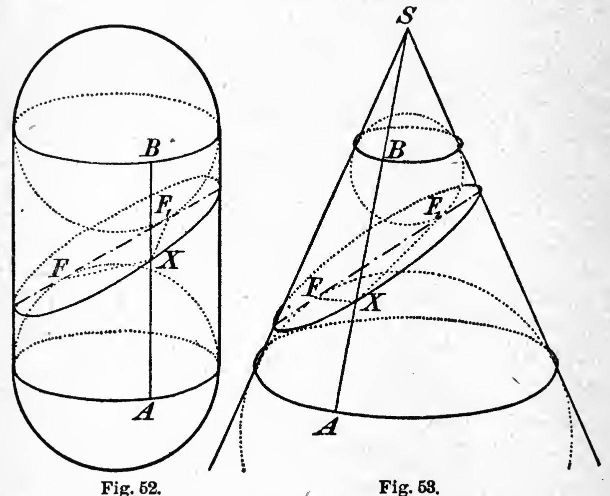


Fig. 52. Fig. 53.

der immer gleichen Mantellinie des Zylinders zwischen den beiden Kugeln (Figur 52).

Eine Linie, welche die Eigenschaft hat, daß die Summe der Entfernungen aller ihrer Punkte von zwei festen Punkten F und F_1 gleich ist, heißt eine Ellipse. Die Punkte F und F_1 heißen die Brennpunkte der Ellipse. Die Ellipse hat zwei aufeinander senkrecht stehende Symmetrieachsen; dieser Satz folgt aus ihrer Konstruktion in der Ebene.

Die Achse, auf der die Brennpunkte liegen, heißt die große Achse, die andere die kleine Achse der Ellipse. In der Figur 52 ist die senkrechte Projektion der Ellipse der Grundkreis des Zylinders. Jeder senkrechte Kreiszylinder wird von einer Ebene, die nicht parallel den Mantellinien ist, nach einer Ellipse geschnitten.

30. Es sei zwei Kugeln ihr äußerer, gemeinschaftlicher Berührungskegel umschrieben und an die beiden Kugeln eine gemeinschaftliche, den Kegel schneidende Berührungsebene gelegt. Diese Ebene schneidet dann den Kegel nach einer Ellipse, in welcher die beiden Berührungspunkte F und F_1 der Ebene mit der Kugel die Brennpunkte sind (Figur 53).

Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt X der Schnittlinie mit den Punkten F und F_1 und zieht durch X die Mantellinie $SBXA$, so ist die Tangente XF gleich der Tangente XA; ebenso ist $XF_1 = XB$, folglich $XF + XF_1 = XA + XB = AB$. AB aber ist für alle Punkte X gleich. Die Schnittlinie ist somit eine Ellipse.

31. Es sei an zwei Kugeln ihr gemeinschaftlicher innerer Berührungskegel gelegt, ferner eine gemeinschaftliche, die Kegelfläche schneidende Berührungsebene mit den Berührungspunkten F und F_1 (Figur 54). Verbindet man dann einen beliebigen Punkt X der Schnittlinie mit den Punkten F und F_1 und zieht durch X die Mantellinie $SXAB$, so ist die Tangente XF_1 gleich der Tangente XA; ebenso ist $XF = XB$ und somit $XF_1 - XF = XA - XB = AB$ gleich der Mantellinie des Kegels zwischen den beiden Kugeln, die für alle Punkte X gleich ist. Die Schnittlinie ist also eine Linie, bei welcher die Differenz der Entfernungen aller ihrer Punkte von zwei festen Punkten F und F_1 gleich ist. Eine Linie mit dieser Eigenschaft heißt eine

Hyperbel und die beiden festen Punkte F und F_1 ihre Brennpunkte.

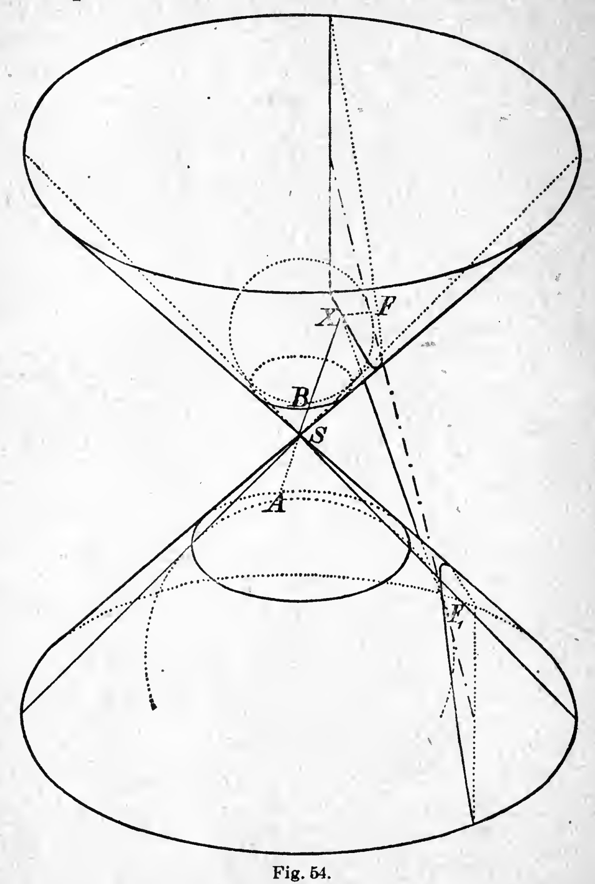


Fig. 54.

Eine Hyperbel hat zwei Symmetrieachsen. Dies folgt aus ihrer Konstruktion in einer Ebene.

32. Es sei eine Kugel und einer ihrer Berührungskegel gegeben und der Kegel mit einer Ebene geschnitten, die parallel einer Berührungsebene des Kegels ist und welche die Kugel in dem Punkt F berührt. Diese Ebene und die Ebene des Berührungskreises schneiden sich dann nach der Geraden CB. Auf diese Gerade sei von einem beliebigen Punkt X der Schnittlinie aus das Lot XB gefällt.

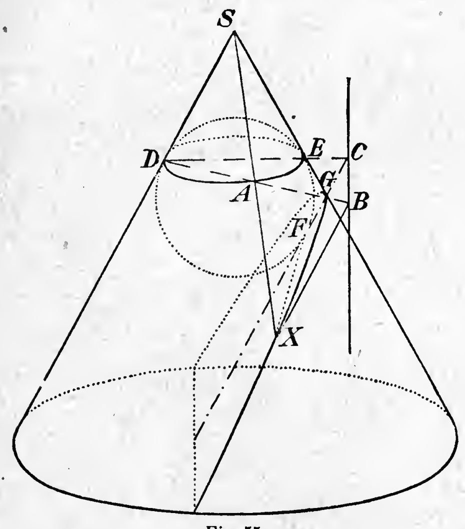


Fig. 55.

Ist in der Figur 55 $SD \parallel FC$, so steht die Berührungsebene auf der Ebene SDE senkrecht, ebenso die Ebene des Berührungskreises. Es ist daher $BC \perp$ Ebene SDE, folglich $\sphericalangle FCB = R$. Hieraus folgt $XB \parallel FC \parallel SD$. Zieht

man SX und DB, so liegt der Schnittpunkt A auf dem Berührungskreis, weil DB in der Ebene dieses Kreises liegt. Es ist nun $\triangle SDA \sim \triangle XBA$; da aber $SA = SD$ ist, so ist auch $XA = XB = XF$.

Die Schnittlinie hat also die Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte von einem festen Punkt F, dem Brennpunkt, und von einer festen Geraden, der Leitlinie, gleiche Entfernung hat. Eine solche Linie heißt eine Parabel. Sie hat eine Symmetrieachse, nämlich FC; dies folgt auch aus der Konstruktion der Parabel in einer Ebene.

Weil eine Ellipse, Hyperbel und Parabel durch den Schnitt eines „Kreiskegels" mit einer Ebene entstehen, heißen diese Linien Kegelschnitte.

33. Der Flächeninhalt F einer Ellipse, deren große Achse gleich $2a$ und deren kleine Achse gleich $2b$ ist, ist

$$F = ab\pi.$$

Beweis. Ist in Nr. 29, Figur 52 der Neigungswinkel der Ellipse gegen den Grundkreis des Zylinders gleich α, so ist noch Nr. 9: $F \cos\alpha = b^2\pi$, wo $\cos\alpha = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$ ist. Folglich ist $\frac{F \cdot b}{a} = b^2\pi$; $F = ab\pi$.

34. Den Satz zu beweisen: Jedem regelmäßigen Polyeder läßt sich eine Kugel umbeschreiben und einbeschreiben,

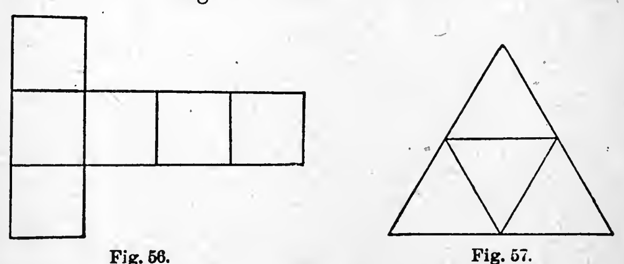


Fig. 56. Fig. 57.

35. Die Netze der regelmäßigen Polyeder zu konstruieren. (Figuren 56, 57, 58, 59, 60.)

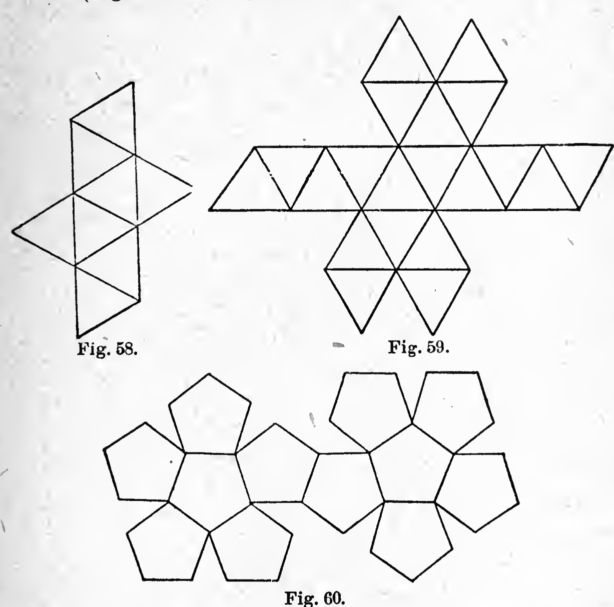


Fig. 58. Fig. 59.

Fig. 60.

36. Wickelt man den Mantel eines senkrechten Kreiszylinders in die Ebene ab, so erhält man ein Rechteck, in dem zwei Seiten von derselben Mantellinien herrühren, während die beiden anderen Seiten gleich den Umfängen der beiden Grundkreise sind. Zieht man nun in diesem Rechteck etwa von einer Ecke aus eine Strecke, welche das Rechteck in zwei Teile teilt, und wickelt dann das Rechteck samt der Strecke wieder auf, so liefert die Strecke auf dem Zylindermantel eine Linie, welche einen Gang

einer Schraubenlinie bildet. Die Länge eines Ganges ist gleich der Strecke. Die ganze Schraubenlinie besteht aus unendlich vielen kongruenten Gängen. Auch die Schraubenlinie läßt sich, wie die Gerade in der Ebene, in sich selbst so verschieben, daß stets vollständige Deckung stattfindet.

Dritter Abschnitt.

Berechnung von Körpern und Flächen.

A. Über das Messen.

1. Unter dem Messen einer gegebenen Größe, z. B. einer Linie, eines Winkels, einer Fläche, eines Körpers, einer Kraft usw. versteht man das Vergleichen dieser Größe mit einer bestimmten Größe derselben Art, der sogenannten Maßeinheit, und es fragt sich dabei, wievielmal die Maßeinheit in der gegebenen Größe enthalten ist; man erhält so eine bestimmte Zahl, welche die Maßzahl der Größe heißt.

2. Die Maßeinheit für eine Linie ist wieder eine Linie, gewöhnlich eine bestimmte Strecke, etwa die Strecke gleich 1 mm, 1 cm, 1 km usf. Hat man nun eine vorgelegte Linie zu messen, so fragt es sich, wievielmal die als Maßeinheit angenommene Strecke in der Linie enthalten ist. Ist dies n mal der Fall, so ist n die Maßzahl für die Länge der Linie. Verhältnismäßig einfach ist das Messen von Strecken; nicht so einfach verhalten sich krumme Linien. Krumme Linien werden durch einbeschriebene geradlinige Vielecke ersetzt; statt der einzelnen Bögen, welche die krumme Linie zusammensetzen, werden die zugehörigen Sehnen genommen und diese gemessen. Die Summe der Maßzahlen dieser Sehnen ergibt dann angenähert die Maßzahl für die Länge der Linie. Soll die Maßzahl einen höheren Grad von Genauigkeit besitzen, so sind die einzelnen Seiten des Viel-

ecks immer kleiner und kleiner anzunehmen. Man erhält so eine Reihe von Maßzahlen, die einer bestimmten Zahl, dem sogenannten Grenzwert, zustreben. Dieser Grenzwert ist dann die Maßzahl für die Länge der Linie. So wird z. B. bekanntlich der Umfang eines Kreises bestimmt, indem man den Umfang des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks berechnet, wo man n immer größer und größer werden läßt.

Wie dieser Grenzwert erhalten wird, wird in der Differential- und Integralrechnung gelehrt. Bei der Bildung des Grenzwertes streben die immer kleiner und kleiner werdenden Vielecksseiten dem Wert Null zu, während die Anzahl der Vielecksseiten dem Wert Unendlich zustrebt.

Eine Größe, welche dem Wert Null zustrebt und für die bei der Bildung eines Grenzwertes Null gesetzt wird, heißt eine unendlich kleine Größe; eine Zahl, welche dem Wert Unendlich zustrebt und für die schließlich unendlich gesetzt wird, heißt eine unendliche Zahl.

3. Die Maßeinheit für eine Fläche ist gewöhnlich ein bestimmtes Quadrat, etwa ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 m, 1 cm, 1 mm usf. Bei den Flächen spricht man dann von einem quadratischen Inhalt.

In manchen Fällen ist es auch vorteilhaft, statt eines Quadrates eine andere Maßeinheit zu wählen, etwa ein Dreieck, einen Rhombus oder sonst eine bestimmte Fläche.

Dient beim Messen einer Fläche ein bestimmtes Quadrat als Maßeinheit, so entsteht die Frage, wievielmal kann man dieses Quadrat in die Fläche derart legen, daß die ganze Fläche ausgefüllt ist, und daß sich die Quadrate an keiner Stelle zum Teil decken.

Die Anzahl der Quadrate, welche in der angegebenen Weise die ganze Fläche bedecken, ist die Maßzahl der Fläche.

Die Maßzahl ist für ein Rechteck leicht zu bestimmen; denn ist die Quadratseite in den beiden Rechteckseiten a mal bzw. b mal enthalten, so ist ab die Maßzahl für den Flächeninhalt. Nicht so einfach verhalten sich ebene Flächen mit krummliniger Begrenzung und gekrümmte Flächen.

Ebene Flächen werden vielfach durch parallele Strecken in Streifen eingeteilt und jeder Streifen als Trapez behandelt. Die Summe der Inhalte sämtlicher Trapeze ist dann angenähert gleich dem Inhalt der Fläche. Ist vollständige Genauigkeit verlangt, so ist die Höhe der einzelnen Trapeze immer kleiner und kleiner anzunehmen; man nimmt sie schließlich unendlich klein. In dieser Weise möge der Inhalt des Dreiecks mit der Grundlinie a und der Größe h berechnet werden (Figuren 61 und 62).

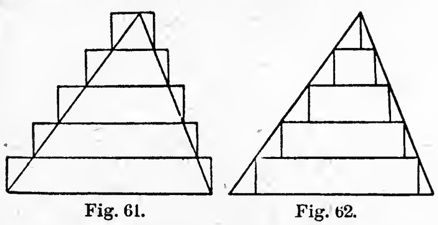


Fig. 61. Fig. 62.

Man teile die Höhe h in n gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte die Parallelen zu der Grundlinie; es entstehen dann n Trapeze, die aber als Rechtecke behandelt werden mögen. Bezeichnet man eine beliebige Rechteckseite mit dem Abstand z von der Spitze mit x, so ist für die Figur 61:

$$x : z = a : h; \quad z = \frac{k\,h}{n}; \quad x = \frac{a\,k}{n},$$

wo $k = 1, 2, 3, \ldots n$ ist.

Der Inhalt eines Rechtecks ist somit $\frac{a\,k\,h}{n^2}$. Die Summe J aller Rechtecke ist:

$$J = \frac{a\,h}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots n) = \frac{a\,h(n+1)\,n}{2n^2}$$
$$= \frac{a\,h}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Strebt nun n dem Wert Unendlich zu, so wird die Höhe $\frac{h}{n}$ unendlich klein und $\frac{1}{n}$ kann gleich Null gesetzt werden.

Es ist dann somit $J = \frac{a\,h}{2}$.

Für die Figur 62 ist:

$$x : z = a : h; \quad z = \frac{(k-1)\,h}{n}; \quad x = \frac{a\,(k-1)}{n};$$
$$J = \frac{a\,h}{n^2}\,[1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)]$$
$$= \frac{a\,h\,(n-1)\,n}{2n^2} = \frac{a\,h}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Wird $n = \infty$, so ist $J = \frac{a\,h}{2}$.

Aus diesem Beispiel erkennt man, daß ein Trapez mit unendlich kleiner Höhe als Rechteck behandelt werden darf, dessen lange Seite gleich einer Grundlinie des Trapezes ist.

4. Die Maßeinheit für den räumlichen Inhalt eines Körpers ist gewöhnlich ein Würfel mit bestimmter Kantenlänge. Die Anzahl der Würfel gleicher Größe, welche den Körper vollständig ohne Lücken ausfüllen, ist die Maßzahl für den Kubikinhalt oder Rauminhalt des Körpers.

Leicht zu bestimmen ist der Kubikinhalt eines Quaders. Ist die Kante des Würfels, der als Maßeinheit dient, in den drei wesentlichen Kanten a mal, b mal, c mal enthalten, so ist die Maßzahl J gleich abc. Man denke hier nur z. B. an den Hohlraum einer Kiste, welcher mit lauter gleichen Würfeln auszufüllen ist.

Für den Kubikinhalt J der senkrechten Prismen und Zylinder kann ebenfalls leicht eine Formel abgeleitet werden. Bezeichnet G den Flächeninhalt der Grundfläche und ist h die Maßzahl der Höhe, so ist $J = Gh$. Die Grundfläche nämlich kann man sich in unendlich viele Rechtecke mit unendlich kleinen Höhen durch Parallelen eingeteilt denken. Konstruiert man über jedem Rechteck einen Quader mit der Höhe h, so ist die Summe aller Quader gleich dem ganzen Körper. Bezeichnet man den Flächeninhalt eines solchen Rechtecks mit F, so ist der Kubikinhalt des dazugehörigen Quaders Fh. Der Kubikinhalt J des ganzen Körpers ist somit $J = \Sigma Fh = h \Sigma F$, wo $\Sigma F = G$ ist; es ist also $J = Gh$.

B. Das Prinzip von Cavalieri.

a) Dieses lautet für ebene Flächen:

Flächen, die in gleichen Höhen gleiche parallele Strecken (Sehnen) haben, haben gleichen Flächeninhalt.

Diese Flächen nämlich setzen sich aus gleich vielen unendlich schmalen Rechtecken zusammen, die in gleicher Höhe auch gleiche Seiten haben.

Beispiel: Die Dreiecke mit derselben Grundlinie a und derselben Höhe h. Bezeichnet man hier eine beliebige Parallele zur Grundlinie mit x und den Abstand von der Spitze mit z, so ist hier $x = \frac{az}{h}$. Bei allen Dreiecken erhält man also bei gleichem z denselben Wert für x.

Die Verwandlung eines Dreiecks in eine Fläche mit krummliniger Begrenzung zeigt die Figur 63.

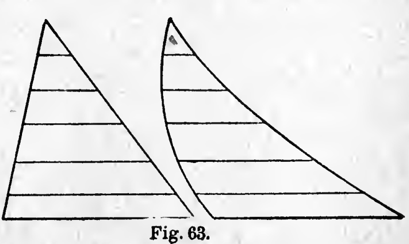


Fig. 63.

b) Für Körper lautet das Prinzip:

Körper, die in gleichen Höhen flächengleiche parallele (ebene) Schnitte haben, haben gleichen Kubikinhalt.

Beweis. Man denke sich bei jedem solchen Körper eine Schicht, welche zwischen zwei Parallelschnitten liegt, und zwar sollen die zu den beiden Parallelschnitten gehörigen Höhen bei allen Körpern gleich sein. Nimmt man den Abstand der beiden Parallelschnitte sehr klein, schließlich unendlich klein, so kann die Schicht als senkrechtes Prisma oder Zylinder angesehen werden. Denn schneidet man die Schicht durch eine beliebige Ebene, die auf den Parallelschnitten senkrecht steht, so kann die Schnittfläche zwar zum Teil krummlinig begrenzt sein; im Grenzfall aber ist die Schnittfläche ein Trapez mit unendlich kleiner Höhe und dieses Trapez darf als Rechteck behandelt werden.

Alle der Betrachtung unterzogene Körper bestehen somit aus gleichvielen und gleichgroßen, unendlich dünnen Schichten; sie haben daher gleichen Kubikinhalt.

C. Über den Kubikinhalt der Prismen und Zylinder.

Bei den Prismen und Zylindern sind bekanntlich alle Parallelschnitte den Grundflächen kongruent. Haben nun Prismen und Zylinder dieselbe Höhe und Grundflächen von demselben Flächeninhalt, so folgt aus dem Cavalierischen Prinzip über den Kubikinhalt von Körpern, daß alle diese Prismen und Zylinder gleichen Kubikinhalt haben. Insbesondere haben diese Körper denselben Kubikinhalt wie ein Quader mit derselben Höhe und mit gleicher Grundfläche, wie sie die Prismen und Zylinder haben.

Da nun vorausgesetzt ist, daß der Quader und die Prismen und Zylinder in der Grundfläche G und der Höhe h übereinstimmen, so ist der Kubikinhalt J dieser Körper:

$$J = G \cdot H .$$

Spricht man das Resultat in Worten aus, so erhält man den Satz:

Man erhält die Maßzahl für den Kubikinhalt eines Prismas oder eines Zylinders durch Multiplikation der Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe.

Natürlich muß jedem Maß dieselbe Längeneinheit zugrunde liegen, d. h. ist z. B. die Höhe in cm ausgedrückt, so muß der Inhalt der Grundfläche in qcm ausgedrückt sein.

D. Über den Kubikinhalt der Pyramiden und Kegel.

Erster Satz.

Pyramiden und Kegel, welche Höhen von derselben Länge h und Grundflächen von demselben Flächeninhalt G haben, haben gleichen Kubikinhalt.

Ein Parallelschnitt einer Pyramide oder eines Kegels ist nämlich, wie bekannt (II, C), den Grundflächen dieser Körper ähnlich. Nach einem Satz der Geometrie aber verhalten sich die Inhalte ähnlicher Figuren, wie die Quadrate homologer Längen, z. B. wie die Quadrate homologer Seiten. Homologe Seiten verhalten sich aber auch wie die Höhen der beiden Pyramiden oder Kegel, die durch einen Parallelschnitt entstehen.

Bezeichnet man die Höhe der kleinen Pyramide mit x und ihre Grundfläche mit Q, die Höhe der größeren mit h, die Grundfläche mit G, so besteht nach unseren Betrachtungen die Beziehung:

$$Q : G = x^2 : h^2.$$

Sind nun für eine Reihe von Pyramiden ihre Grundflächen gleich, ebenso die Höhen, und macht man im Abstand x von der Spitze bei allen einen Parallelschnitt, so

sind, wie unsere aufgestellte Beziehung zeigt, alle diese Parallelschnitte für jedes beliebige z gleich.

Nach dem Cavalierischen Prinzip sind somit die Kubikinhalte von Pyramiden und von Kegeln, die gleiche Höhen und Grundflächen von gleichem Flächeninhalt haben, gleich. Insbesondere sind die Kubikinhalte gleich dem Kubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide, welche dieselbe Höhe und eine Grundfläche von demselben Flächeninhalt hat, wie die Pyramiden und Kegel.

Zweiter Satz.

Ein dreiseitiges Prisma kann in drei gleich große Pyramiden zerlegt werden.

Beweis. Es sei $ABCDEF$ ein beliebiges dreiseitiges Prisma (Figur 64). Zieht man BD, BF und CD, so erhält man drei Pyramiden: $BDEF$, $BACD$ und $BFCD$, welche zusammen das ganze Prisma zusammensetzen.

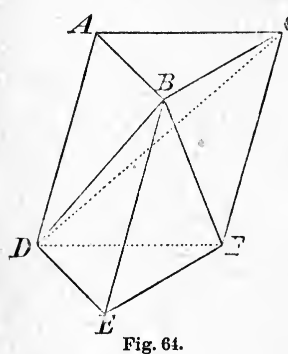


Fig. 64.

Die beiden Pyramiden $BACD$ und $BFCD$ sind gleich; denn sie haben die Spitze B gemeinschaftlich; ferner liegen ihre Grundflächen ACD und FCD in derselben Ebene und sind gleich. Die beiden Pyramiden haben somit gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, sind somit gleich.

Weiter ist die Pyramide $BFCD$ ganz dieselbe, wie die Pyramide $DBFC$; dasselbe gilt für die beiden Pyramiden $BDEF$ und $DBFE$.

Die beiden Pyramiden $DBFC$ und $DBFE$ nun haben die Spitze D gemeinschaftlich; ihre Grundflächen liegen

in derselben Ebene und sind kongruent. Da somit die beiden Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so sind sie gleich.

Es sind daher alle drei Pyramiden gleich.

Die Pyramide $BDEF$ und das dreiseitige Prisma aber haben dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe. Da der Inhalt eines dreiseitigen Prismas gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe ist und unsere Pyramide gleich dem dritten Teil des Prismas ist, so erhält man den Satz:

Dritter Satz.

Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem Produkt aus den Maßzahlen der Grundfläche und der Höhe, dividiert mit drei.

Weiter erhält man den allgemeinen Satz:

Vierter Satz.

Der Kubikinhalt J einer Pyramide oder eines Kegels ist gleich dem Produkt aus der Maßzahl der Grundfläche und derjenigen der Höhe, dividiert mit drei.

Bezeichnet man mit G die Maßzahl der Grundfläche, mit h diejenige der Höhe, so lautet der Satz in einer Formel ausgedrückt:

$$J = \frac{G\,h}{3}.$$

E. Über den Kubikinhalt des Prismatoids.

Satz. Sind G und G_1 die Maßzahlen der beiden Grundflächen, M diejenige des Mittelschnitts und h diejenige der Höhe, so ist der Kubikinhalt J eines Prismatoides ausgedrückt durch die Formel:

$$J = \frac{h}{6}\,(G + G_1 + 4M).$$

Diese Formel, die sehr wichtig ist, heißt die Prismatoidformel (Schichtenformel, Simpsonsche Regel).

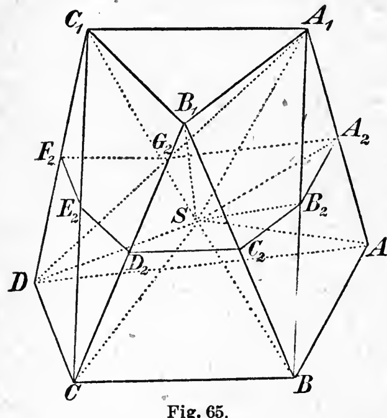


Fig. 65.

Die Prismatoidformel wird in folgender Weise erhalten: Man verbinde einen beliebigen Punkt S des Mittelschnittes mit allen Ecken der beiden Grundflächen, dann wird das ganze Prismatoid in lauter Pyramiden eingeteilt, deren Inhalte zu berechnen sind (Figur 65).

Zunächst hat man zwei Pyramiden mit den Grundflächen G und G_1 und den Höhen gleich $\frac{h}{2}$.

Der Kubikinhalt dieser beiden Pyramiden zusammen ist somit

$$\frac{hG}{6} + \frac{hG_1}{6} = \frac{h}{6}(G + G_1).$$

Es bleiben jetzt noch diejenigen Pyramiden zu berechnen übrig, deren Spitzen ebenfalls der Punkt S ist und deren Grundflächen die Seitenflächen des Prismatoids sind.

Eine solche Pyramide ist z. B. die Pyramide $SABA_1$. Sie kann mit der Pyramide $SA_1A_2B_2$ verglichen werden. Beide haben nämlich dieselbe Höhe. Die Grundfläche der einen aber ist viermal so groß, wie diejenige der anderen; folglich ist auch die Pyramide $SABA_1$ viermal so groß

als die Pyramide $S A_1 A_2 B_2$. Bei letzterer kann aber auch der Punkt A_1 als Spitze angesehen werden, während $S A_2 B_2$ Grundfläche ist. Diese Grundfläche, deren Inhalt gleich m sei, liegt im Mittelschnitt. Die Höhe der Pyramide ist gleich $\frac{h}{2}$ und somit ihr Inhalt gleich $\frac{m h}{6}$. Der Inhalt der ganzen Seitenpyramide $S A B A_1$ ist folglich gleich $\frac{4 m h}{6}$.

Jede der in Betracht kommenden Seitenpyramiden nun bestimmt eine Grundfläche m im Mittelschnitt. Alle diese Grundflächen füllen den ganzen Mittelschnitt aus.

Der Inhalt aller Seitenpyramiden zusammen ist daher gleich der Summe aller $\frac{4 m h}{6}$ oder gleich $\frac{4 h}{6}$ mal der Summe aller m und daher gleich $\frac{4 h}{6} M$.

Der ganze Inhalt J eines Prismatoids ist somit:

$$J = \frac{h}{6}(G + G_1) + \frac{4 h}{6} M = \frac{h}{6}(G + G_1 + 4 M).$$

Die Prismatoidformel gilt nicht nur für die eigentlichen Prismatoide, wo die Grundflächen ebene Vielecke sind — letztere können auch zu Linien und Punkten zusammenschrumpfen —, sondern auch für diejenigen Körper, wo eine oder beide Grundflächen in krumme Linien übergehen.

Weiter ist sie auch für eine unendlich große Anzahl anderer Körper gültig.

F. Über den Inhalt der Parallelschnitte eines Prismatoids.

Satz. Der Flächeninhalt Q eines Parallelschnittes im Abstand x von der Grundfläche G ist von der Form:

$$Q = G + a x + b x^2,$$

wo a und b bestimmte Zahlen sind.

Beweis. Man projiziere die Grundfläche $G_1 = A_1 B_1 C_1$, den Parallelschnitt 1234567 und die Seitenkanten auf die Grundfläche $G = ABCD$. Die Grundfläche G_1 und der Parallelschnitt projizieren sich dann in wahrer Größe (Figur 66). Die Seiten des letzteren teilen eine Anzahl von Dreiecken, nämlich die Projektionen der Seitenflächen, in Dreiecke und Trapeze.

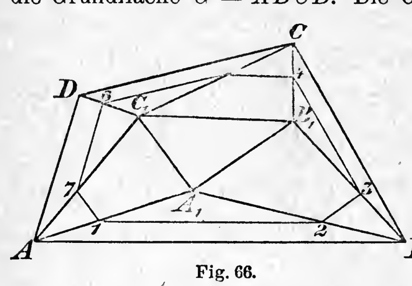


Fig. 66.

Zieht man von der Grundfläche G bestimmte Dreiecke und Trapeze ab, so z. B. das Dreieck $A17$ und das Trapez $AB12$, so erhält man den Flächeninhalt des Parallelschnittes. Dasjenige Dreieck, z. B. $\triangle A A_1 C_1$, in welchem ein Dreieck ($A\,17$) in Abzug kommt, werde mit J_1 bezeichnet; es ist dann der Inhalt i_1 des in Abzug kommenden Dreiecks bestimmt durch die Proportion:

$$i_1 : J_1 = z^2 : h^2, \text{ woraus folgt: } i_1 = \frac{J_1 z^2}{h^2}$$

Dasjenige Dreieck, z. B. ABA_1, für welches ein abzuziehendes Trapez ($AB\,12$) in Betracht kommt, habe den Inhalt J_2; der Inhalt des Trapezes sei i_2; dann ist:

$$i_2 = J_2 - \frac{J_2 (z-h)^2}{h^2} = \frac{2 J_2 z}{h} - \frac{J_2 z^2}{h^2}.$$

Es ist daher:

$$Q = G - (\text{Summe aller } i_1) - (\text{Summe aller } i_2)$$
$$= G - \frac{z^2}{h^2} \Sigma J_1 + \frac{z^2}{h^2} \Sigma J_2 - \frac{2z}{h} \Sigma J_2,$$

wo Σ bedeutet „Summe aller“.

Da ΣJ_1 und ΣJ_2 bestimmte Zahlen sind, so ist der Flächeninhalt Q von der oben angegebenen Form.

G. Über die Körper, deren Kubikinhalte sich mittels der Prismatoidformel berechnen lassen.

Aus dem Satz von Cavalieri (III, B) und dem Satz in E folgt, daß die Kubikinhalte aller Körper nach der Prismatoidformel berechnet werden können, deren Parallelschnitte einen Inhalt Q von der Form: $Q = \alpha + \beta z + \gamma z^2$ haben. Man kann nachweisen (siehe unten), daß Q von der Form sein darf:

$$Q = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 .$$

Körper mit dieser Eigenschaft sind:

1. Die abgestumpfte Pyramide.

2. Der abgestumpfte Kegel.

3. Von den Umdrehungskörpern diejenigen, die durch Umdrehung eines Kegelschnittes um eine Hauptachse entstehen (Kugel, Umdrehungsellipsoid, Umdrehungshyperboloid, Umdrehungsparaboloid), ferner diejenigen, die eine bestimmte Kurve dritter Ordnung, deren Gleichung $x^2 = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$, durch Drehung um die Z-Achse erzeugt. Es gilt bei diesen Körpern die Formel für den Inahlt zwischen zwei beliebigen Parallelkreisen.

4. Die von sogenannten Flächen zweiter Ordnung (und Ebenen) begrenzten Körper zwischen zwei beliebigen parallelen Ebenen (vgl. 3).

5. Diejenigen Körper, die entstehen, indem eine Gerade an den Umfängen zweier paralleler Grundflächen G und G_1 und an einer dritten beliebigen Linie L, die gerade oder krumm, oder teilweise beides zugleich sein kann, hingleitet (Regelflächen, abwickelbare Flächen). G, G_1 und L dürfen dabei auch zu Null werden, d. h. zu Linien (Kanten) und Punkte ausarten.

6. Diejenigen schief abgeschnittenen Zylinder, deren Normalschnitt ein Kegelschnitt oder die in Nummer 3 genannte Kurve ist; es haben hier die beiden schiefen Flächen durch eine Symmetrieachse des Normalschnittes zu gehen; ferner handelt es sich um den Kubikinhalt zwischen zwei Ebenen, die auf der genannten Symmetrieachse senkrecht stehen.

Es gibt noch eine unendlich große Anzahl von schief abgeschnittenen Zylindern, die hierher gehören.

Anmerkung. Um den Kubikinhalt K der Körper zu bestimmen, deren Parallelschnitt einen Inhalt Q von der Form $Q = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ haben, kann man folgendermaßen verfahren: Man denke sich den Körper von der Höhe $z = 0$ an bis zur Höhe $z = h$ in sehr viele (unendlich viele) dünne Schichten von der gleichen sehr kleinen (unendlich kleinen) Höhe d zerlegt; der Kubikinhalt einer solchen Schicht ist dann in der beliebigen Höhe z: $(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3)\, d$. Hat man h in k gleiche Teile d zerlegt, so ist $h = kd$, $z = ld = \frac{hl}{k}$, wo $l = 0, 1, 2 \ldots k$ ist.

Der Kubikinhalt des ganzen Körpers wird somit:

$$K = \Sigma(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3)\, d,$$

wobei $z = \frac{hl}{k}$ zu setzen ist.

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Werte von Ausdrücken mit der Form

$$S = \Sigma z^n d = \Sigma \frac{h^n l^n}{k^n} \cdot \frac{h}{k} = \Sigma \frac{h^{n+1}}{k^{n+1}} l^n = h^{n+1} \Sigma \frac{l^n}{k^{n+1}}.$$

$\Sigma \frac{l^n}{k^{n+1}}$ nun, wo $k = \infty$ ist und l die Werte $0, 1, 2 \ldots k = \infty$ annimmt, hat jedenfalls einen ganz bestimmten Wert C, so daß $S = Ch^{n+1}$ wird. C hat aber denselben

Wert, wenn man $(h + d)$ statt h setzt; man erhält so:

$$S' = C(h + d)^{n+1} = C[h^{n+1} + (n + 1) h^n d],$$

weil d eine unendlich kleine Größe ist. (Hier ist die allgemeine Gültigkeit des binomischen Lehrsatzes als bekannt vorausgesetzt.) Es wird daher:

$$S' - S = C(n + 1) h^n d = h^n d \text{ und somit } C = \frac{1}{n + 1};$$

n darf hier jede beliebige ganze oder gebrochene positive oder negative Zahl sein. Wendet man dieses Resultat auf unseren speziellen Fall an, so erhält man:

$$K = \alpha h + \beta \frac{h^2}{2} + \gamma \frac{h^3}{3} + \delta \frac{h^4}{4}.$$

Nun ist:

$$G = \alpha, \qquad (z = 0),$$

$$G_1 = \alpha + \beta h + \gamma h^2 + \delta h^3 \qquad (z = h),$$

$$4M = 4\alpha + 2\beta h + \gamma h^2 + \frac{\delta h^3}{2} \qquad \left(z = \frac{h}{2}\right).$$

$$(G + G_1 + 4M) \frac{h}{6} = \alpha h + \beta \frac{h^2}{2} + \gamma \frac{h^3}{3} + \delta \frac{h^4}{4} = K.$$

Der Abstand s des Schwerpunktes des Körpers von der Grundfläche G, wobei $z = 0$, ist:

$$s = \left(\alpha \frac{h^2}{2} + \beta \frac{h^3}{3} + \gamma \frac{h^4}{4} + \delta \frac{h^5}{5}\right) : K.$$

Ist $\delta = 0$, so ist $s = h \dfrac{G_1 + 2M}{G + G_1 + 4M}$.

Die hier angegebene Methode läßt sich auf alle Körper anwenden, bei welchen die Parallelschnitte einen Inhalt Q von der Form $Q = \Sigma A_n x^n$ haben, wo A_n eine bestimmte Größe und n irgend eine Zahl ist.

H. Einige Anwendungen der Prismatoidformel.

a) Berechnung des Kubikinhaltes des abgestumpften Kreiskegels:

Werden die Radien der Grundkreise mit r und r_1 bezeichnet, die Höhe mit h, so ist:
$G = r^2 \pi$, $G_1 = r_1^2 \pi$; $4M = (r + r_1)^2 \pi$ und der Kubikinhalt J des Körpers:

$$J = \frac{h\pi}{3}(r^2 + r_1^2 + rr_1).$$

b) Berechnung des Kubikinhaltes J der abgestumpften Pyramide.

Bei ihr sind die Grundflächen und der Mittelschnitt ähnliche Vielecke. Sind G und G_1 die Inhalte der beiden Grundflächen und M der des Mittelschnittes, so kann man setzen:

$$G = a^2, \; G_1 = a_1^2, \; M = \left(\frac{a + a_1}{2}\right)^2,$$

$$M = \frac{a^2 + 2aa_1 + a_1^2}{4} = \frac{G + G_1 + 2\sqrt{GG_1}}{4}.$$

Es wird daher:

$$J = \frac{h}{3}\left(G + G_1 + \sqrt{GG_1}\right).$$

c) Berechnung des Kubikinhaltes einer Kugel mit dem Radius r und dem Durchmesser d.

Die Grundflächen liegen hier in zwei parallelen Berührungsebenen; sie schrumpfen je zu einem Punkt zusammen. Der Mittelschnitt ist hier ein Großkreis. Man erhält somit:

$$G = 0, \quad G_1 = 0, \quad 4M = 4r^2\pi, \quad h = 2r,$$

$$\text{Kubikinhalt } J = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{d^3\pi}{6}.$$

d) Berechnung des Kubikinhaltes J einer zentrisch und zylindrisch ausgebohrten Kugel mit dem Radius r und der halben lichten Weite d.

Die beiden Grundflächen sind hier Kreislinien, der Mittelschnitt ein Kreisring. Die halbe Höhe des Körpers ist gleich $\sqrt{r^2 - d^2}$; man erhält so:

$$G = G_1 = 0\,; \quad 4M = 4\pi(r^2 - d^2)\,.$$

$$J = \frac{4\pi}{3}(r^2 - d^2)\sqrt{r^2 - d^2}\,.$$

e) Berechnung des Kubikinhaltes eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, dessen Seitenkanten die Längen a, b und c haben und dessen Normalschnitt den Inhalt Q besitzt (Figur 67).

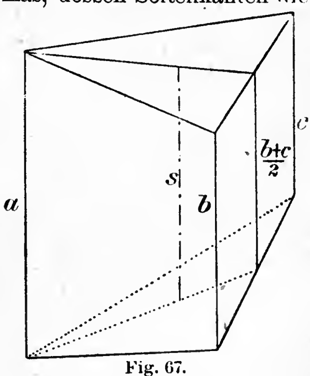


Fig. 67.

Man kann hier die eine Seitenfläche als die eine Grundfläche und die gegenüberliegende Seitenkante c als die andere Grundfläche eines Prismatoids ansehen. Bezeichnet man die Höhe dieser Grundfläche mit H und den Abstand der Kante c von der Grundfläche mit h, so ist:

$$G = \frac{a+b}{2}H, \quad G_1 = 0\,, \quad Hh = 2Q\,,$$

$$4M = 4\,\frac{a+b+2c}{2\cdot 2}\cdot\frac{H}{2} = (a+b+2c)\frac{H}{2}\,,$$

$$J = \frac{h}{6}(a+b+c)H = Q\,\frac{a+b+c}{3}\,.$$

Unter dem Schwerpunkt einer Dreiecksfläche versteht man den Schnittpunkt der drei Transversalen nach den Mitten der Seiten. Die drei Transversalen werden bekanntlich durch den Schwerpunkt im Verhältnis $1:2$ geteilt.

Verbindet man nun die Schwerpunkte der beiden Dreiecksflächen miteinander, so ist die Verbindungsgerade parallel zu den Seitenkanten. Die Länge s dieser Strecke selbst ist:

$$s = \frac{b+c}{2} + \left(a - \frac{b+c}{2}\right)\frac{1}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

Man erhält somit:

$J = Qs$, d. h. der Kubikinhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist gleich dem Produkt aus dem Normalschnitt des Prismas und dem Abstand der Schwerpunkte der beiden Dreiecksflächen.

f) Berechnung des Kubikinhalts eines schief abgeschnittenen vierseitigen Prismas.

Ein solches Prisma läßt sich in zwei dreiseitige Prismen mit den Normalschnitten Q_1 und Q_2 und den Schwerpunktabständen s_1 und s_2 zerlegen.

Der Inhalt J des Prismas ist dann:

$$J = Q_1 s_1 + Q_2 s_2 .$$

Es gibt nun jedenfalls eine Strecke s, die parallel den Seitenkanten des Prismas ist und die Eigenschaft hat, daß: $J = Qs$ wird, wo Q der Inhalt des ganzen Normalschnittes ist. Ein Prisma aber läßt sich auf zwei Arten in zwei dreiseitige zerlegen.

Man erhält so:

$$J = Q_1 s_1 + Q_2 s_2 = Q_3 s_3 + Q_4 s_4 = Qs .$$

Der Kubikinhalt des Prismas ändert sich nicht, wenn man es derart abändert, daß die schiefen Flächen durch beliebige andere ersetzt werden, deren Flächen durch die Verbindungsgeraden der Endpunkte von s_1 und s_2 oder von s_3 und s_4 gehen. Man kann nun daher das Prisma zunächst in ein anderes verwandeln, bei welchem die beiden schiefen Flächen einer Diagonale des Normalschnittes parallel sind und hierauf in gleicher Weise in ein zweites, bei welchem die schiefen Flächen parallel dem Normalschnitt sind. Man erhält so ein senkrechtes Prisma. Bei diesen Verwandlungen wird nun die Schnittgerade s der beiden Ebenen durch s_1 und s_2, s_3 und s_4 zur Höhe. s verbindet

somit die Schwerpunkte der beiden ursprünglichen schiefen Flächen.

Der Inhalt eines schief abgeschnittenen vierseitigen Prismas ist somit gleich dem Produkt aus dem Normalschnitt und dem Abstand der Schwerpunkte der beiden Vierecksflächen.

Dieser Satz läßt sich auch auf mehrseitige Prismen ausdehnen und lautet dann:

Der Inhalt eines schief abgeschnittenen Prismas oder Zylinders ist gleich dem Produkt aus dem Normalschnitt und aus dem Abstand der Schwerpunkte der beiden schiefen Flächen, die das Prisma oder den Zylinder abschließen.

I. Über die Oberfläche von Körpern.

a) Das Prisma und der Zylinder.

1. Der Mantel eines senkrechten Prismas oder Zylinders ist nach seiner Ausbreitung in die Ebene ein Rechteck, dessen eine Seite gleich der Höhe des Körpers ist und dessen andere Seite gleich dem Umfang der Grundfläche ist. Zu der Gesamtoberfläche kommen noch die beiden Grundflächen hinzu.

Ist u der Umfang der Grundfläche G, h die Höhe des Prismas oder des Zylinders, so ist der Inhalt M des Mantels: $M = uh$; der Inhalt O der Oberfläche: $O = uh + 2G$.

2. Der Mantel eines schiefen Prismas breitet sich in eine Ebene in einer Reihe von Parallelogrammen aus, die alle eine Seite gleich haben, während die zugehörigen Höhen ungleich sind. Alle diese Höhen zusammen sind gleich dem Umfang des Normalschnittes. Man erhält so den Satz:

Der Mantel eines schiefen Prismas oder eines schiefen Zylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfang des

Normalschnittes und der Seitenkantenlänge bzw. Mantellinie

b) Die Pyramide.

Über die Oberfläche der Pyramiden kann nichts Allgemeines ausgesagt werden. Jeder einzelne Fall verlangt seine besondere Berechnung.

c) Der gewöhnliche Kreiskegel.

Breitet man den Mantel dieses Kegels in die Ebene aus, so erhält man einen Kreisausschnitt mit dem Zentriwinkel α. Ist r der Radius des Grundkreises, h die Höhe und m die Mantellinie des Kegels, so ist der Inhalt M des Mantels:

$$M = \frac{2r\pi m}{2} = r\pi m = r\pi\sqrt{r^2 + h^2}\,.$$

(Der Inhalt des Kreissektors ist gleich dem Produkt aus dem Bogen und dem Radius, dividiert mit zwei.)

Um die ganze Oberfläche zu erhalten, hat man zum Mantel noch die Grundfläche mit $r^2\pi$ zu addieren.

α ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{2m\pi\alpha}{360} = 2r\pi;\ \alpha = \frac{r \cdot 360}{m} \text{ Grade.}$$

d) Der abgestumpfte Kegel.

Die Ausbreitungsfigur des Mantels dieses Körpers ist ein Kreisringausschnitt mit dem Zentriwinkel α (Figur 68). Der Inhalt eines solchen wird berechnet, indem man den mittleren Bogen mit der Dicke des Ringes multipliziert. Sind die Radien der beiden Grundkreise gleich r_1 und r_2, die Mantellinie gleich m, die Höhe gleich h, so ist der mittlere Bogen gleich $(r_1 + r_2)\pi$, und weil die Dicke des Ringes gleich m ist, so erhält man für den Mantel M des abgestumpften Kegels:

$$M = (r_1 + r_2)\pi m\,.$$

Zwischen h, r_1, r_2 und m besteht noch die Beziehung:

$$m^2 = h^2 + (r_1 - r_2)^2 .$$

α ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\alpha = \frac{(r_1 - r_2)\,360}{m} \text{ Grade.}$$

Ein abgestumpfter Kegel entsteht durch Drehung eines Trapezes mit zwei rechten Winkeln, die an der Drehachse liegen. Errichtet man nun auf dem Schenkel, welcher den

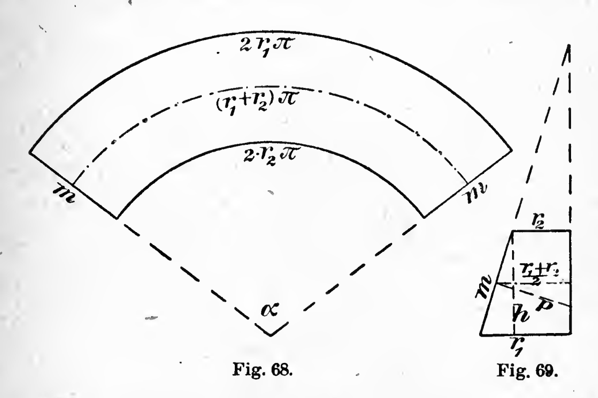


Fig. 68. Fig. 69.

Mantel erzeugt und gleich der Mantellinie des Kegels ist, das Mittellot p bis zum Schnitt mit der Achse und zieht durch die Mitte des Schenkels die Parallele zu den Grundlinien bis zum Schnitt mit der Achse; fällt man ferner vom Endpunkt des Schenkels auf die größere Grundlinie das Lot, so erhält man zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke. Für diese besteht dann die Proportion (Figur 69):

$$\frac{r_1 + r_2}{2} : p = h : m \text{, woraus folgt:}$$

$$(r_1 + r_2)\, m = 2ph .$$

Dieses Resultat ergibt eine neue Formel für den Mantel M eines abgestumpften Kegels, nämlich:

$$M = 2p\pi h\,.$$

Will man die ganze Oberfläche des Körpers erhalten, so hat man zu M noch die Grundkreise mit $r_1{}^2\pi$ und $r_2{}^2\pi$ zu addieren.

e) Die Kugel.

Satz:

Die krumme Oberfläche M einer Kugel mit dem Radius r und dem Durchmesser d, welche zwischen zwei Parallelkreisen mit dem Abstand h liegt, ist:

$$M = 2r\pi h = d\pi h\,.$$

Die Oberfläche der Kugel zwischen zwei unendlich nahen Parallelkreisen nämlich kann als der Mantel eines abgestumpften Kegels angesehen werden. Es wird dann das p in Nr. d gleich dem Radius r der Kugel. Bezeichnet man nun den unendlich kleinen Flächenstreifen mit f und den unendlich kleinen Abstand der unendlich nahen Parallelkreise mit e, so wird:

$$f = 2r\pi e\,.$$

Man denkt sich nun die ganze Oberfläche der Kugel zwischen zwei Parallelkreisen mit endlichem Abstand h in lauter hintereinander folgende unendlich kleine Streifen f zerlegt. Dann ist die Oberfläche M gleich der Summe aller $2r\pi e$, in einer Formel ausgedrückt:

$$M = \Sigma 2r\pi e\,.$$

Da $2r\pi$ für alle Streifen denselben Wert hat, kann man schreiben:

$$M = 2r\pi\Sigma e = 2r\pi h\,, \quad \text{da } \Sigma e = h \text{ ist.}$$

Für die Oberfläche der Vollkugel ist $h = 2r$; folglich ist der Flächeninhalt O der Oberfläche einer ganzen Kugel:

$$O = 2r\pi \cdot 2r = 4r^2\pi = d^2\pi\,.$$

f) Satz.

Der Mantel eines schief abgeschnittenen senkrechten Prismas oder Zylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfang der Grundfläche und dem Lot, das im Schwerpunkt dieses Umfanges auf der Grundfläche bis zum Schnitt mit der schiefen Fläche errichtet ist.

Beweis. Die Seitenflächen des schief abgeschnittenen Prismas sind Trapeze, deren Höhen mit h_1, h_2, h_3 usf. und deren Mittellinien mit m_1, m_2, m_3 usf. bezeichnet sein sollen. Die Höhen sind zugleich die Seiten der Grundfläche.

Der Inhalt M des Mantels des schief abgeschnittenen Prismas ist dann:

$$M = h_1 m_1 + h_2 m_2 + h_3 m_3 \text{ usf.}$$

Man lege nun durch die Mittellinie m_1 und m_2 eine Ebene. Diese schneidet das Prisma nach einem Trapez (Figur 70).

Man bestimme ferner den Schwerpunkt der Seiten h_1 und h_2, indem man die Verbindungslinie ihrer Mitten im Verhältnis $h_2 : h_1$ teilt, und errichte im Schwerpunkt das Lot bis zum Schnitt mit der schiefen Ebene. Dieses Lot, das mit M_1 bezeichnet sei, liegt dann in der Ebene des genannten Trapezes. Für dieses Trapez gilt dann folgende Proportion:

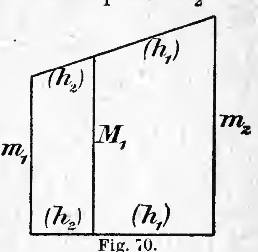


Fig. 70.

$$m_2 - m_1 : M_1 - m_1 = h_1 + h_2 : h_2 ,$$

woraus folgt:

$$M_1 (h_1 + h_2) = m_1 h_1 + m_2 h_2 .$$

Ganz in derselben Weise kann man jetzt $M_1 (h_1 + h_2)$ mit $m_3 h_3$ zu $M_2 (h_1 + h_2 + h_3)$ vereinigen, wo M_2 das Lot auf der Grundfläche im Schwerpunkt von $(h_1 + h_2)$

und h_3 ist. Fährt man in dieser Weise fort, so erhält man schließlich für den Inhalt M des Mantels des schief abgeschnittenen Prismas folgenden Ausdruck:

$$M = M_n (h_1 + h_2 + h_3 + \ldots) = M_n\, u\,.$$

Hier bedeutet u den Umfang der Grundfläche und M_n das Lot, das im Schwerpunkt dieses Umfanges auf der Grundfläche senkrecht steht und bis zum Schnitt mit der schiefen Ebene geht.

Da der Satz für ein beliebiges n-seitiges Prisma gilt, so gilt er auch für den schief abgeschnittenen Zylinder.

Der oben ausgesprochene Satz kann noch etwas erweitert werden. Jedes beliebige schief abgeschnittene Prisma zerfällt nämlich durch einen beliebigen Normalschnitt in zwei schief abgeschnittene senkrechte Prismen, die eben diesen Normalschnitt zur Grundfläche haben. Durch diese Überlegung gelangt man zu dem erweiterten Satz:

Der Mantel eines schief abgeschnittenen Prismas oder Zylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfang des Normalschnittes und dem Lot, das im Schwerpunkt dieses Umfanges auf dem Normalschnitt bis zum Schnitt mit den beiden schiefen Flächen errichtet ist.

K. Die Guldinsche Regel.

Die Guldinsche Regel lautet:

Dreht sich eine ebene Figur um eine in ihrer Ebene liegende Achse, so wird ein Umdrehungskörper erzeugt, der neben anderen Eigenschaften folgende besitzt:

a) Der Kubikinhalt des Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus der Fläche der erzeugenden Figur und dem Weg des Schwerpunktes der Fläche, den dieser bei der Drehung zurückgelegt hat.

b) Die Oberfläche des Umdrehungskörpers ist gleich dem Produkt aus dem Umfang der erzeugenden Figur und

dem Weg des Schwerpunktes des Umfanges der Figur, den der Schwerpunkt bei der Drehung zurückgelegt hat.

Der Beweis der beiden ausgesprochenen Sätze gründet sich auf die Sätze in H, f und I, f.

Man denke sich nämlich den Umdrehungskörper durch Ebenen, welche durch die Drehachse gehen, in unendlich kleine Stücke geteilt. Diese unendlich kleinen Stücke sind dann auch unendlich kleine schief abgeschnittene senkrechte Prismen oder Zylinder, was aus dem Satz folgt: Die Verbindungslinie zweier aufeinander folgender Punkte eines Kreises, d. h. die Tangente in einem Punkt steht auf dem Radius des Kreises nach diesem Punkt senkrecht.

Die beiden Wege, welche der Schwerpunkt der Fläche und der des Umfanges der Figur bei der Erzeugung eines unendlich kleinen Stückes zurückgelegt hat, fallen aber mit den Loten in diesen Punkten zusammen, die auf der Fläche bis zum Schnitt mit der unendlich nahen, nächstfolgenden Fläche errichtet werden.

Nach H, f und I, f gilt somit die Guldinsche Regel für die bezeichneten unendlich kleinen Stücke des Körpers und somit auch für einen endlichen Teil oder den ganzen Körper.

Die Guldinsche Regel erstreckt sich nicht nur auf die Umdrehungskörper, sondern auch auf eine weitere Gattung von Körpern. Es sind dies die Körper, deren Oberflächen sogenannte Kanalflächen sind. Diese Körper werden erzeugt, indem sich eine ebene Figur derart im Raum fortbewegt, daß die Ebene der Figur immer in demselben Punkt der Figur auf der Fortschreitungsrichtung, d. h. auf der Tangente einer beliebigen Linie im Raum senkrecht steht.

Dies ist bei den Umdrehungskörpern der Fall. Die eben genannte Linie ist hier ein Kreis. Die Umdrehungskörper gehören somit zu der genannten ausgedehnteren Klasse von Körpern.

L. Verschiedenes.

a) Kubikinhalt K eines beliebigen Kugelausschnittes.

Dieser ist: $$K = \frac{Or}{3}.$$

Hier bedeutet O die zum Ausschnitt gehörige Oberfläche der Kugel mit dem Radius r.

Man denke sich nämlich O in unendlich kleine Dreiecke mit der Fläche f zerlegt und die Eckpunkte mit dem Kugelmittelpunkte verbunden; man erhält so unendlich viele und unendlich kleine Pyramiden; jede hat den Inhalt $\frac{fr}{3}$. Es ist somit $K = \Sigma \frac{fr}{3} = \frac{r}{3} \Sigma f = \frac{r\,O}{3}$.

b) Der Kubikinhalt K des Kugelabschnittes.

Dieser kann auf verschiedene Arten berechnet werden (Figur 71).

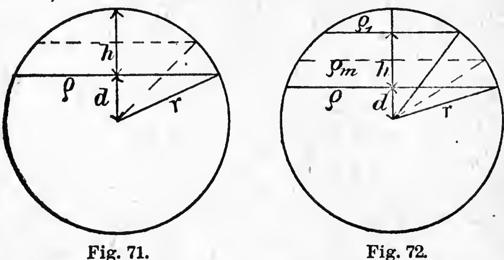


Fig. 71. Fig. 72.

1. Man ziehe vom zugehörigen Kugelsektor den zugehörigen Kreiskegel ab. Man erhält dann:

$$K = \frac{Or}{3} - \frac{\varrho^2 \pi d}{3} \quad \text{oder, da} \quad O = 2r\pi h \quad \text{ist:}$$

$$K = \frac{2r^2\pi h}{3} - \frac{\varrho^2 \pi d}{3}.$$

Berücksichtigt man, daß $d + h = r$, $r^2 = \varrho^2 + d^2$, $\varrho^2 = h(2r - h)$ ist, so erhält man auch:

$$K = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + h^2).$$

2. Man wende die Prismatoidformel an; dann ist

$$G = 0, \quad G_1 = \varrho^2 \pi, \quad 4M = 4\left[r^2 - \left(d + \frac{h}{2}\right)^2\right]\pi,$$

$$K = (\varrho^2 + 4r^2 - 4d^2 - 4dh - h^2)\frac{\pi h}{6} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

3. Man benütze III, G, Anm. In unserem Fall ist $Q = [r^2 - (r - z)^2]\pi = (2rz - z^2)\pi$ (z = Abstand von der Berührungsebene, die parallel dem Grundkreis). Es ist somit:

$$K = \left(\frac{2rh^2}{2} - \frac{h^3}{3}\right)\pi = \frac{h^2\pi}{3}(3r - h).$$

c) Schwerpunkt der Kugelzonenfläche.

Dieser liegt in der Mitte der Zonenachse. Dies folgt aus III, I, e, wenn man berücksichtigt, daß die Schwerpunkte der einzelnen Flächenteilchen auf der Zonenachse liegen.

d) Schwerpunkt des Kugelausschnittes.

Zerlegt man den Kugelausschnitt wie in Nr. a, so liegen die Schwerpunkte der einzelnen Pyramiden auf einer Kugelfläche mit dem Radius $\frac{3}{4}r$. Der gesuchte Schwerpunkt fällt dann mit dem Schwerpunkt dieser Kugelfläche zusammen. Entsteht der Ausschnitt durch einen Kreiskegel mit der Höhe h, so findet man den Abstand s seines Schwerpunktes von der Spitze zu:

$$s = \left(\frac{3r}{4} - \frac{3h}{4}\right)\frac{1}{2} + \frac{3h}{4} = \frac{3}{8}(r + h).$$

Für die Halbkugel ist $h = 0$, $s = \frac{3}{8}r$.

e) Kubikinhalt K der Kugelzone.

Für die Prismatoidformel ist (Figur 72):

$$G = (r^2 - d^2)\pi = \varrho^2\pi ,$$
$$G_1 = [r^2 - (d + h)^2]\pi = \varrho_1^2\pi ,$$
$$4M = 4\left[r^2 - \left(d + \frac{h}{2}\right)^2\right]\pi = (2\varrho^2 + 2\varrho_1^2 + h^2)\pi ,$$
$$K = \frac{h\pi}{3}(3r^2 - 3d^2 - 3dh - h^2)$$
$$= \frac{\pi h}{6}(3\varrho^2 + 3\varrho_1^2 + h^2) .$$

f) Der Schwerpunkt der Kugelzone.

Nach III, G findet man seinen Abstand s von der Grundfläche $G = \varrho^2\pi$ zu:

$$s = \frac{h}{2} \cdot \frac{2\varrho^2 + 4\varrho_1^2 + h^2}{3\varrho^2 + 3\varrho_1^2 + h^2} .$$

Beim Kugelabschnitt ist $\varrho_1 = 0$ und somit

$$s = \frac{h}{2} \cdot \frac{2\varrho^2 + h^2}{3\varrho^2 + h^2} = \frac{h}{4} \cdot \frac{4r - h}{3r - h} .$$

g) Sätze über ähnliche Raumgebilde

(Abschn. II, A, Seite 39).

1. Bei zwei ähnlichen Raumgebilden sind wie in der ebenen Geometrie homologe Längen proportional zu einander. Sind also L und L_1 zwei Längen des einen Gebildes, l und l_1 die entsprechenden Längen des anderen, so ist $L : l = q$ und $L_1 : l_1 = q$.

2. Homologe Flächen F und f verhalten sich wie die Quadrate homologer Längen. Es ist also $F : f = L^2 : l^2 = q^2$.

3. Die Kubikinhalte K und k der ganzen Körper oder diejenigen ihrer homologen Teile verhalten sich wie die dritten Potenzen homologer Längen. Es ist also $K : k = L^3 : l^3 = q^3$.

M. Aufgaben über Berechnungen an Körpern.

a) Das Prisma und der Zylinder.

1. Welchen Kubikinhalt J hat ein Quader mit den Kanten 30 cm, 20 cm, 15 cm? Wie groß ist seine Oberfläche O und seine Diagonale d?

Antwort: $J = 30 \cdot 20 \cdot 15 \text{ ccm} = 9000 \text{ ccm} = 9 \text{ cdm}$;
$O = 2\,(30 \cdot 20 + 30 \cdot 15 + 20 \cdot 15) = 2700 \text{ qcm} = 27 \text{ qdm}$;
$d = \sqrt{30^2 + 20^2 + 15^2} = 39{,}051 \text{ cm} = 3{,}9051 \text{ dm}$.

2. Ein Behälter mit quadratischem Boden (Quadratseite gleich 80 cm) kann 768 l fassen. Wie tief ist der Behälter und seine innere Oberfläche F?

$$\text{Antwort: } \frac{768}{8^2} = \frac{768}{64} = 12 \text{ dm} = 1{,}2 \text{ m};$$
$F = 3{,}2 \cdot 1{,}2 + 0{,}8^2 = 4{,}48 \text{ qm}$.

3. Ein Graben von 80 m Länge und 1,5 m Tiefe ist oben 3 m, unten 1,2 m breit. Wieviel Erdmasse war auszugraben?

$$\text{Antwort: } \frac{3 + 1{,}2}{2}\, 1{,}5 \cdot 80 \text{ cbm} = 252 \text{ cbm}.$$

4. Eine Säule, deren Querschnitt ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 20 cm ist, ist 3,8 m hoch. Wieviel wiegt die Säule, wenn ihr spezifisches Gewicht 0,9 ist, und wie groß ist ihr Mantel M?

Antwort: Ihr Gewicht G ist:
$$G = \frac{2^2 \sqrt{3} \cdot 6}{4}\, 38 \cdot 0{,}9 \text{ kg} = 355{,}6 \text{ kg};$$
$$M = 0{,}2 \cdot 3{,}8 \cdot 6 \text{ qm} = 4{,}56 \text{ qm}.$$

5. Eine zylindrische Säule hat einen Durchmesser von 30 cm und ist 2,8 m hoch. Wie groß ist ihr Inhalt J und ihr Mantel M?

Antwort: $J = \frac{0{,}3^2}{4}\pi \cdot 2{,}8$ cbm $= 0{,}198$ cbm;

$M = 0{,}3\pi \cdot 2{,}8$ qm $= 2{,}64$ qm.

6. Ein röhrenförmiger Körper entsteht, indem man aus einem 20 cm hohen Quader mit quadratischer Grundfläche (Quadratseite gleich 8 cm) einen gleichhohen Quader mit der Quadratseite 5 cm herausnimmt. Den Inhalt J und die Oberfläche O zu berechnen.

Antwort:

$J = (8^2 - 5^2)\,20 = 780$ ccm;

$O = (32 + 20)\,20 + (8^2 - 5^2)\,2 = 1118$ qcm.

7. Eine zylindrische Hohlsäule hat einen Durchmesser von 36 cm, eine Höhe von 4,2 m und eine Wandstärke von 3,5 cm. Wieviel wiegt die Säule (spezifisches Gewicht = 7,3)? Wie groß ist ihre äußere und innere krumme Oberfläche M_a und M_i?

Antwort:

Ihr Gewicht ist: $(1{,}8^2 - 1{,}45^2)\,\pi \cdot 42 \cdot 7{,}3$ kg $= 1095{,}6$ kg;

$M_a = 0{,}36\,\pi \cdot 4{,}2 = 4{,}75$ qm; $M_i = 0{,}29 \cdot \pi \cdot 4{,}2 = 3{,}83$ qm.

8. Ein Quader aus Holz (spezifisches Gewicht = 0,6) mit den Kanten 40 cm, 30 cm, 10 cm wird mit seiner größten Fläche auf Wasser gelegt und mit 2,4 kg beschwert. Bis zu welcher Tiefe sinkt der Quader?

Anleitung: Sie ist bestimmt durch die Gleichung:

$4 \cdot 3 \cdot x \cdot 1 = 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 0{,}6 + 2{,}4;\ x = 8$ cm.

9. Ein Kreiszylinder aus Holz mit dem Durchmesser 56 cm und der Höhe 1,2 m sinkt, mit der Grundfläche auf Wasser gelegt und mit 45 kg beschwert, 0,9 m ein. Welches ist das spezifische Gewicht s des Holzes? Wie groß ist die benetzte Fläche M des Zylinders?

Antwort: s wird erhalten aus:

$2{,}8^2\pi \cdot 9 \cdot 1 = 2{,}8^2\pi \cdot 12 \cdot s + 45;\quad s = 0{,}597;$

$M = (0{,}56\pi \cdot 0{,}9 + 0{,}28^2\pi)$ qm $= 1{,}83$ qm.

10. Eine Kiste aus Holz (spezifisches Gewicht 0,7) hat im Lichten eine Tiefe von 2 m, am Boden die Kanten 5 m und 4 m und eine Bretterdicke von 3,5 cm. Die Kiste, die keinen Deckel hat, sinkt 1,6 m tief in Wasser ein. Wieviel Kilogramm Belastung B befinden sich in ihr?

Antwort: B bestimmt sich aus:

$$(20{,}35 \cdot 50{,}7 \cdot 40{,}7 - 20 \cdot 50 \cdot 40)\, 0{,}7 + B$$
$$= 50{,}7 \cdot 40{,}7 \cdot 16 \cdot 1\,; \quad B = 31{,}6\, t\,.$$

11. Aus einem zylindrischen Balken mit dem Durchmesser 0,8 m und der Länge 3,5 m soll ein möglichst großer quadratischer Balken ausgehauen werden. Welches ist der Kubikinhalt J des Balkens und der der Abfälle?

Antwort: $J = (0{,}4^2 + 0{,}4^2)\, 3{,}5$ cbm $= 1{,}12$ cbm;
Abfälle $= (0{,}4^2\pi \cdot 3{,}5 - J)$ cbm $= 0{,}638$ cbm.

12. Ein quadratischer Turm (Quadratseite 9,5 m) hat eine Höhe von 32 m, eine Mauerstärke von 1,5 m und 8 gleiche Fensteröffnungen von der Breite 2 m und der Höhe 4 m. Die Öffnungen sind oben halbkreisförmig (Tonnengewölbe). Wieviel Backsteine waren notwendig (1 cbm = 400 Stück)? Wie groß sind die äußeren und inneren Putzflächen und die Leibungen L?

Antwort: Die Anzahl der Backsteine ist:

$$\left[(9{,}5^2 - 6{,}5^2)\, 32 - \left(2 \cdot 3 + \frac{1^2 \cdot \pi}{2}\right) 1{,}5 \cdot 8\right] \cdot 400$$
$$= 578\,000 \text{ Stück};$$

die äußere Putzfläche:

$$\left[9{,}5 \cdot 4 \cdot 32 - \left(2 \cdot 3 + \frac{1^2 \cdot \pi}{2}\right) 8\right] \text{qm} = 1155{,}44 \text{ qm},$$

die innere:

$$\left[6{,}5 \cdot 4 \cdot 32 - \left(2 \cdot 3 + \frac{1^2 \cdot \pi}{2}\right) 8\right] \text{qm} = 771{,}44 \text{ qm};$$

$$L = (6 + \pi)\, 1{,}5 \cdot 8 \text{ qm} = 109{,}7 \text{ qm}.$$

13. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie $3:5:7$. Sein Inhalt ist 2835 cbm. Wie groß sind die Kanten und die Oberfläche O?

Anleitung: Sind die Kanten $3x$, $5x$, $7x$ in m, so ist: $O = 142x^2$ und $105x^3 = 2835$, $x^3 = 27$; $x = 3$ m usw.

14. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie $3:4:7$; seine Oberfläche beträgt 1,098 qm. Wie groß ist sein Inhalt? ($J = 0{,}07165$ cbm.)

15. Die Kanten eines Quaders verhalten sich wie $3:4:12$; seine Diagonale ist 6,5 m lang. Wie groß ist sein Inhalt J und seine Oberfläche O?

Anleitung: Sind die Kanten $3x$, $4x$, $12x$ m lang, so ist: $9x^2 + 16x^2 + 144x^2 = 6{,}5^2$.

$J = 144x^3$ cbm; $O = 192x^2$ qm.

($J = 18$ cbm; $O = 48$ qm.)

16. Ein Würfel aus Blei (spezifisches Gewicht 11,35) wiegt 32 kg. Wie groß ist sein Inhalt J, seine Kante x und seine Oberfläche O?

Anleitung: $J = 32 : 11{,}35 = 2{,}819$ cdm;
$x^3 = 2{,}819$; $x = 1{,}413$ dcm; $O = 6x^2 = 12$ qdm.

17. Aus dem Würfel der vorigen Aufgabe soll ein Kreiszylinder gegossen werden, dessen Durchmesser gleich der Höhe ist. Welches ist die Länge x der letzteren?

Antwort: Die Länge x bestimmt sich aus:

$$\frac{x^2}{4}\pi \cdot x \cdot 11{,}35 = 32; \quad x = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 4}{11{,}35\pi}} = 1{,}531 \text{ dm}.$$

18. Ein zylindrischer Behälter soll 200 l fassen können und seine Höhe gleich dem dreifachen Radius des Bodens sein. Wie lang sind diese und wieviel Blech ist notwendig?

Anleitung: Ist der Radius des Bodens x dm lang, so ist:

$$x^2\pi \cdot 3x = 200\ , \quad x = \sqrt[3]{\frac{200}{3\pi}} = 2{,}77 \text{ dm}\ ,$$

das notwendige Blech:

$(x^2\pi + 2x\pi \cdot 3x)$ qdm $= 7x^2\pi$ qdm $= 168{,}6$ qdm.

19. der Mantel eines Zylinders ist gleich 25 qm und seine Höhe gleich dem Durchmesser. Wie groß sind diese und sein Inhalt?

$(x^2\pi = 25; x = 2{,}82\text{ m}; J = x^3\pi : 4 = 25x : 4 = 17{,}625 \text{ cdm.})$

20. Es soll die Wandstärke einer gußeisernen zylindrischen Säule (spezifisches Gewicht 7,5) berechnet werden, deren Umfang 90 cm, deren Höhe 3,6 m und deren Gewicht 650 kg ist. (Man bezeichne den inneren, lichten Radius mit x dm.) Antwort: 3 cm.

21. Ein senkrechter Kreiszylinder (Radius des Grundkreises gleich 5 cm) wird von zwei parallelen Ebenen derart geschnitten, daß die langen Achsen der entstehenden Ellipsen 16 cm lang und der Mantellinien 30 cm lang werden. Den Inhalt J, Höhe h, Mantel M und Oberfläche O des schiefen Zylinders zu berechnen.

Antwort: Es ist $h : 30 = 10 : 16$;

$h = 18{,}75 \cdot J = 8 \cdot 5 \cdot \pi \cdot 18{,}75 = 2356{,}2$ ccm;

$M = 10\pi \cdot 30 = 942{,}48$ qcm;

$O = 300\pi + 5 \cdot 8\pi \cdot 2 = 380\pi = 1193{,}8$ qcm.

b) Die Pyramide und der Kegel.

1. In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide sind die Grundkanten 2,5 m und die Höhe 1,8 m lang. Wie groß ist ihr Inhalt J und ihr Mantel M?

Antwort: $J = \frac{2{,}5^2 \cdot 1{,}8}{3}$ cbm $= 3{,}75$ cbm;

$M = \left(1{,}25\sqrt{1{,}25^2 + 1{,}8^2}\right) 4$ qm $= 10{,}955$ qm.

2. In einer quadratischen Pyramide messen die Grund- und Seitenkanten 60 cm. Wie groß ist ihr Inhalt J und ihre Oberfläche O?

$$\text{Antwort: } J = \frac{60^2 \cdot \sqrt{1800}}{3} \text{ ccm} = 50911 \text{ ccm};$$

$$O = 60^2 + \frac{60^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = 60^2(1 + \sqrt{3}) = 9835{,}6 \text{ qcm}.$$

3. In einer Pyramide, deren vier Seitenkanten je 13 cm messen, ist die Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten 6 cm und 8 cm. Den Inhalt J, Höhe h, Mantel M und Oberfläche O zu berechnen.

Antwort: $h^2 = 13^2 - 3^2 - 4^2 = 144$; $h = 12$ cm.

$$J = \frac{6 \cdot 8 \cdot 12}{3} = 192 \text{ ccm};$$

$$M = 6\sqrt{13^2 - 3^2} + 8\sqrt{13^2 - 4^2} = 174{,}85 \text{ qcm};$$

$O = 222{,}85$ qcm.

4. Ein 8 m hohes Kirchturmdach, dessen Grundriß ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 1,2 m ist, soll mit Zinkblech bedeckt werden. Wieviel Quadratmeter Zinkblech sind notwendig und wieviel Kubikmeter überdeckt das Dach? (29,2 qm; 10 cbm.)

5. Eine regelmäßige achtseitige Pyramide hat Grundkanten von der Länge 1,5 m und 6 m lange Seitenkanten. Wie groß ist ihre Höhe h, ihr Mantel M und ihr Inhalt J?

Antwort: $M = 0{,}75\sqrt{6^2 - 0{,}75^2} \cdot 8 = 35{,}73$ qm; der Radius r des Umkreises der Grundfläche ist

$$1{,}5 \cdot 1{,}307 = 1{,}96 \text{ m}; \quad h = \sqrt{6^2 - 1{,}96^2} = 5{,}67 \text{ m};$$

$$J = 1{,}5^2 \cdot 4{,}8284 \cdot 5{,}67 : 3 = 20{,}53 \text{ cbm}.$$

6. Ein Kreiskegel hat eine Höhe von 12 cm; der Radius seines Grundkreises ist 5 cm lang. Wie groß ist der Inhalt J und der Mantel M des Kegels und α?

Antwort: $J = \frac{5^2 \pi \cdot 12}{3} = 314{,}16$ ccm; $M = 5\pi \cdot 13$
$= 204{,}2$ qcm; $\alpha = 5 \cdot 360 : 13 = 138^0 28'$;
$O = 282{,}74$ qcm.

7. Die Mantellinie eines Kreiskegels mißt 10 cm, der Radius seines Grundkreises 6 cm. Welches ist seine Höhe h, sein Inhalt J und sein Mantel M und α?

Antwort:

$$h = \sqrt{10^2 - 6^2} \text{ cm} = 8 \text{ cm}; \; J = \frac{6^2 \pi \cdot 8}{3} = 301{,}6 \text{ ccm};$$

$$M = 6\pi \cdot 10 \text{ qcm} = 60\pi = 188{,}5 \text{ qcm}; \; \alpha = \frac{6 \cdot 360}{10} = 216^0.$$

8. Ein Kreissektor mit dem Radius 12 cm und dem Zentriwinkel 240^0 ist der Mantel eines Kreiskegels.

Wie groß ist der Radius r seines Grundkreises, seine Höhe h und sein Inhalt J?

Anleitung:

Es ist: $2 r \pi = \frac{2 \cdot 12 \pi \cdot 240}{360}$; $r = 8$ cm;

$$h = \sqrt{12^2 - r^2}; \quad J = \frac{r^2 \pi h}{3} = 48\pi \cdot 7{,}746 = 1165 \text{ ccm};$$

$$M = 96\pi = 301{,}6 \text{ qcm}.$$

9. Ein Kreiskegel hat einen Kubikinhalt von 2,5 cbm. Die Höhe des Kegels ist $1^1/_2$ mal so groß als der Radius der Grundfläche. Wie groß sind dieser Radius, die Höhe h und der Mantel M des Kegels und α?

Anleitung: Ist der Radius des Grundkreises $2x$ m lang, so ist $h = 3x$, folglich:

$$\frac{4x^2 \pi \cdot 3x}{3} = 2{,}5;$$

$$M = 2x\pi\sqrt{4x^2 + 9x^2} = 2x^2\pi\sqrt{13} = 7{,}72 \text{ qm};$$

$$r = 1{,}167 \text{ m}; \; h = 3{,}502 \text{ m}; \; \alpha = 720 : \sqrt{13} = 199^0 41' 24''.$$

10. Ein senkrechter Kreiskegel wiegt 12,5 kg (spezifisches Gewicht 3,2) und ist 20 cm hoch. Wie groß ist der Radius r des Grundkreises, der Inhalt J, der Mantel M und α?

Anleitung: $J \cdot 3{,}2 = 12{,}5;\quad J = 3{,}906$ cdm;
$r^2\pi \cdot 2 \cdot 3{,}2 : 3 = 12{,}5;\quad r = 1{,}365$ dm;
$M = r\pi\sqrt{r^2 + 2^2} = 10{,}4$ qdm; $\alpha = r \cdot 360 : 2{,}42$.

11. Die Höhe eines Kreiskegels ist h, der Radius des Grundkreises r, sein spezifisches Gewicht s $(s < 1)$.

Wie tief sinkt er in Wasser ein: a) wenn er mit seiner Spitze ins Wasser taucht, b) mit seiner Grundfläche?

Auflösung: a) Die Tiefe sei x, dann ist der Radius des Grundkreises des verdrängten Wasserkegels $\frac{rx}{h}$; der Inhalt dieses Kegels somit: $\frac{r^2x^2\pi \cdot x}{3h^2}$. Der Kegel selbst hat das Gewicht $\frac{r^2\pi h \cdot s}{3}$. Es ist daher:

$$\frac{r^2\pi x^3 \cdot 1}{3h^2} = \frac{r^2\pi h s}{3};\quad x = \sqrt[3]{h^3 s} = h\sqrt[3]{s}\,.$$

b) Im zweiten Fall habe der hervorragende Kegel die Höhe x. Die verdrängte Wassermasse hat dann den Inhalt

$$\frac{r^2\pi h}{3} - \frac{r^2\pi x^3}{3h^2};$$

es ist daher

$$\left(\frac{r^2\pi h}{3} - \frac{r^2\pi x^3}{3h^2}\right) \cdot 1 = \frac{r^2\pi h \cdot s}{3},\quad x = h\sqrt[3]{1 - s}$$

und die gesuchte Tiefe:

$$h - h\sqrt[3]{1 - s} = h\left(1 - \sqrt[3]{1 - s}\right).$$

12. Eine Pyramide mit der Höhe h, der Grundfläche G, dem Inhalt J, dem Mantel M und der Oberfläche O durch Ebenen, parallel der Grundfläche, in 3 gleiche Teile zu teilen und die Teil zu berechnen.

Anleitung: Sind die Abstände der Schnitte von der Spitze gleich x, so ist: $x^3 : h^3 = 1 : 3$; $y^3 : h^3 = 2 : 3$; $M_1 : M = O_1 : O = x^2 : h^2$; $M_2 : M = O_2 : O = y^2 : h^2$ usf.

13. Den Kegel zu berechnen, bei dem $J = 48$ cdm und $O = 108$ qdm ist.

Anleitung: r ist bestimmt durch die Gleichung: $9J^2 = O^2 r^2 - 2\,O r^4 \pi$. ($r \backsim 3{,}90$ dm und $r \backsim 1{,}42$ dm.)

14. Ein Kegel soll bei gegebener Oberfläche O den größten Inhalt J besitzen.

Anleitung: Man benütze die Gleichung in Nr. 13. Dann muß sein: $2\,O^2 r - 8\,O r^3 \pi = 0$; $4 r^2 \pi = O$; $m : r = 3 : 1$.

15. Den Kegel zu berechnen, bei dem $J = 3$ cbm, $M = 10$ qm ist.

Anleitung: r ist bestimmt durch die Gleichung:

$$9J^2 = M^2 r^2 - r^6 \pi^2 .$$

16. Ein Kegel soll bei gegebenem Mantel M den größten Inhalt J besitzen.

Anleitung: Nach der Gleichung in Nr. 15 muß sein:

$$2M^2 r - 6 r^5 \pi^2 = 0 ; \quad M^2 - 3 r^4 \pi^2 = 0 ;$$

$$r^2 m^2 \pi^2 - 3 r^4 \pi^2 = 0 ; \quad m^2 = 3 r^2 ; \quad h^2 = 2 r^2 ;$$

$$m : h : r = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1 .$$

17. Den Kegel zu berechnen, bei dem $J = 36$ ccm und $m = 5$ cm ist. (Gleichung sechsten Grades:

$$\pi^2 r^6 - m^2 \pi^2 r^4 + 9J^2 = 0 .)$$

18. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist der Achsenschnitt eines senkrechten Kreiskegels. Dieser wird von einer Ebene nach einer Ellipse derart geschnitten, daß die größte Mantellinie des abgeschnittenen Kegels gleich a (4 cm), die kleinste gleich b (3 cm) wird. Wie groß ist der Inhalt J des abgeschnittenen Kegels?

$$J = ab\pi \sqrt{2ab} : 12 .$$

19. Dieselbe Aufgabe, wie in Nr. 18; es soll nur an Stelle des rechtwinkligen Dreiecks ein gleichschenkliges Dreieck treten und die lange Achse der Ellipse mit c bezeichnet werden. Berechnung der Oberfläche und des Mantels aus dem Inhalt, indem man den Kegel in Kegel zerlegt, die den Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel zur Spitze haben.

Anleitung: Es sei $2s = a + b + c$, dann ist die kleine Halbachse der Ellipse $\sqrt{(s-a)(s-b)}$. Die Höhe h des Kegels ist bestimmt durch $ch = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; folglich ist

$$J = \frac{c\sqrt{(s-a)(s-b)}\,\pi \cdot 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{2 \cdot 3 \cdot c}$$

$$= \frac{\pi(s-a)(s-b)\sqrt{s(s-c)}}{3}.$$

Weiter ist $O\varrho = 3J$; $O = \pi s\sqrt{(s-a)(s-b)}$ und

$$M = \pi\sqrt{(s-a)(s-b)}\,\frac{a+b}{2}.$$

c) Die Prismatoide.

1. In einer abgestumpften regelmäßigen quadratischen Pyramide mit der Höhe 3,2 m messen die Grundkanten 1,2 m und 0,9 m. Wie groß ist ihr Kubikinhalt und wie groß die vier Seitenflächen M?

Auflösung:

$$G = 1{,}2^2, \quad G_1 = 0{,}9^2 \cdot 4M = 2{,}1^2;$$

$$J = \frac{3{,}2}{6}(1{,}2^2 + 0{,}9^2 + 2{,}1^2) = 3{,}552 \text{ cbm};$$

$$M = \left(\frac{1{,}2 + 0{,}9}{2}\sqrt{3{,}2^2 + 0{,}15^2}\right) 4 \text{ qm}.$$

2. Die Grundflächen eines 3 m hohen Prismatoids sind Rechtecke, bei welchen die größeren Seiten parallel sind. Die Seiten der einen Grundfläche messen 9 m und 6 m,

diejenigen des kleineren 6 m und 3 m. Ist das Prismatoid eine abgestumpfte Pyramide oder nicht? Wie groß ist der Kubikinhalt J des Körpers und O?

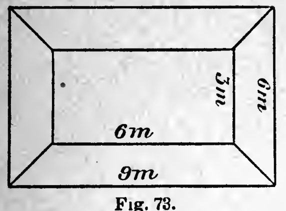


Fig. 73.

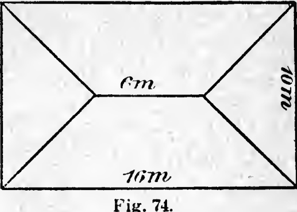


Fig. 74.

Auflösung: Der Körper ist keine abgestumpfte Pyramide, weil die beiden Grundflächen keine ähnliche Rechtecke sind (Figur 73).

$$G = 9 \cdot 6 = 54 \text{ qm}; \quad G_1 = 6 \cdot 3 = 18 \text{ qm};$$
$$4M = 15 \cdot 9 = 135 \text{ qm};$$
$$J = \frac{3}{6}(54 + 18 + 135) = 103{,}5 \text{ cbm};$$
$$O = 9 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 15\sqrt{3^2 + 1{,}5^2} + 9\sqrt{3^2 + 1{,}5^2}$$
$$= 72 + 24\sqrt{11{,}25} = 152{,}5 \text{ qm}.$$

3. Ein 4 m hohes Prismatoid hat rechteckige Grundflächen mit den Seiten 12 m, 8 m und 9 m, 6 m. Die größeren Seiten des einen Rechtecks sind den größeren des andern parallel. Ist das Prismatoid eine abgestumpfte Pyramide oder nicht? Welches ist der Kubikinhalt des Körpers und der Mantel?

Auflösung: Der Körper ist eine abgestumpfte Pyramide, weil $12 : 8 = 9 : 6$.

$$G = 96; \quad G_1 = 54; \quad 4M = 21 \cdot 14 = 294;$$
$$J = \frac{4}{6}(96 + 54 + 294) = 296 \text{ cbm};$$
$$\text{Mantel} = \left(21\sqrt{4^2 + 1^2} + 14\sqrt{4^2 + 1{,}5^2}\right) \text{ qm}.$$

4. In einer abgestumpften regelmäßigen sechsseitigen Pyramide messen die Grundkanten 2,5 m und 1,2 m, die Höhe 8 m. Welches ist der Inhalt und der Mantel des Körpers?

Auflösung: Der Inhalt eines regulären Sechsecks mit der Seite a ist $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, folglich ist:

$$G = \frac{3 \cdot 2{,}5^2\sqrt{3}}{2}; \quad G_1 = \frac{3 \cdot 1{,}2^2\sqrt{3}}{2}; \quad 4\,M = \frac{3 \cdot 3{,}7^2\sqrt{3}}{2};$$

$$J = \frac{8}{6} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}(2{,}5^2 + 1{,}2^2 + 3{,}7^2)\,\text{cbm};$$

$$\text{Mantel} = (2{,}5 + 1{,}2)\,0{,}5\sqrt{8^2 + 1{,}3^2 - 0{,}65^2} \cdot 6$$
$$= \left(11{,}1\sqrt{66{,}11}\right)\,\text{qm}.$$

5. Ein 30 cm tiefes Gefäß aus Blech hat die Gestalt eines abgestumpften Kreiskegels, bei welchem die Radien der Grundkreise 20 cm und 14 cm messen. Welches ist der Inhalt des Gefäßes und wieviel Blech war zu seiner Herstellung notwendig?

Auflösung: $G = 2^2\pi$; $G_1 = 1{,}4^2\pi$; $4M = 3{,}4^2\pi$;

$$J = \frac{3\pi}{6}(2^2 + 1{,}4^2 + 3{,}4^2) = 27{,}52\ \text{l};$$

$$O = \left[(20 + 14)\pi\sqrt{30^2 + 6^2} + 14^2\pi\right]\,\text{qcm}.$$

Für den abgewickelten Mantel kommen die Radien $14\sqrt{26}$ cm und $20\sqrt{26}$ cm in Betracht; ferner ist

$$\alpha = 360 : \sqrt{26} = 70{,}5^0\,.$$

6. Den abgestumpften senkrechten Kreiskegel zu berechnen, bei dem $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 4$ cm, $m = 13$ cm ist.

Lösung: $G = 81\,\pi$, $G_1 = 16\,\pi$; $4\,M = 169\,\pi$;

$$J = \frac{12\,\pi \cdot 266}{6} = 532\,\pi = 1671{,}3\ \text{ccm};$$

$$h = 12; \quad \text{Mantel} = 13 \cdot 13\pi = 530{,}9 \text{ qcm};$$
$$O = 169\pi + 97\pi = 1671{,}3 \text{ qcm}.$$

Die Radien des abgewickelten Mantels messen 10,4 cm und 23,4 cm; $\alpha = 5 \cdot 360 : 13 = 138^0 28'$.

7. Ein rechteckiger Grundriß mit den Seiten 16 m und 10 m ist mit einem Walmdach überdeckt, dessen vier Dachflächen alle die gleiche Neigung von 45^0 gegen den Horizont haben. Welchen Kubikinhalt J schließen die Dächer ein und wie groß sind die Dachflächen M_1 (Figur 74)?

Lösung: $G = 160$, $G_1 = 0$; $4M = 220$; $h = 5$;
$$J = 5 \cdot 380 : 6 \doteq 316\tfrac{2}{3} \text{ cbm};$$
$$M_1 = 16 \cdot 10 : \cos 45^0 = 160\sqrt{2} = 226 \text{ qm}.$$

8. Zwei Erdeinschnitte in horizontalem Gelände sind 3 m tief und kreuzen sich unter rechtem Winkel. Die oberen Ränder haben eine Entfernung von 15 m. Die Erdmassen böschen sich unter 45^0 ab. Wieviel Erdmasse war auf den mittleren 40 m auszuschachten und wie groß ist die Fläche F der Böschungen (Figur 75)?

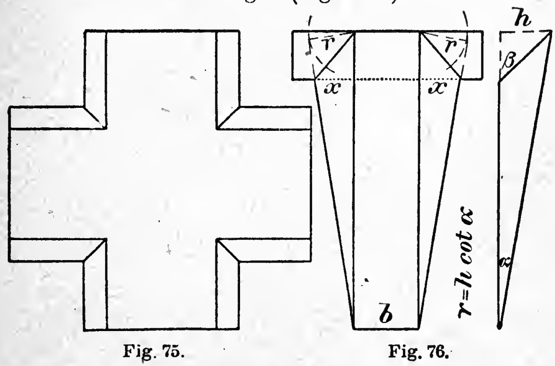


Fig. 75. Fig. 76.

Lösung:
$$G = 2 \cdot 15 \cdot 40 - 15^2 = 975 \text{ qm};$$

$$G_1 = 2 \cdot 9 \cdot 40 - 9^2 = 639 \text{ qm};$$
$$4M = 4(2 \cdot 12 \cdot 40 - 12^2) = 3264 \text{ qm};$$
$$J = \tfrac{3}{6}(975 + 639 + 3264) = 2439 \text{ cbm};$$
$$F = (975 - 639) : \cos 45^0 = 476 \text{ qm}.$$

9. Auf einen Damm mit der Höhe h Meter soll eine b Meter breite Straße, senkrecht zum Damm, geführt werden. Die Neigung gegen die Horizontale sei bei der Straße gleich α, bei den Böschungen des Dammes gleich β und bei denen der Rampe gleich γ.

Welches ist der Kubikinhalt K der Rampe (Figur 76)?

Es ist hier $G = O$, $\quad G_1 = (x + b)\, h\, (\cot\alpha - \cot\beta)$;

$$4M = (2b + x)\, h\, (\cot\alpha - \cot\beta);$$
$$K = \frac{h^2}{6}(3b + 2x)(\cot\alpha - \cot\beta);$$
$$x = \frac{h \cot\gamma\, (\cot\alpha - \cot\beta)}{\sqrt{\cot^2\alpha - \cot^2\gamma}}.$$

10. Ein 1,2 m tiefes Fahrzeug hat einen rechteckigen Boden mit den Seitenlängen 7 m und 3 m, während die oberen Ränder 8 m und 3,8 m lang sind. Wie groß darf seine Belastung sein, wenn das Eigengewicht 1500 kg beträgt, und wenn es 30 cm aus dem Wasser hervorragen soll?

Auflösung: Der Schnitt des Wasserspiegels mit dem Fahrzeug ist ein Rechteck mit den Seiten 7,75 m und 3,6 m. Für die verdrängte Wassermasse J ist somit:

$$G = 7 \cdot 3 = 21 \text{ qm}, \quad G_1 = 7{,}75 \cdot 3{,}6 = 27{,}9 \text{ qm};$$
$$4M = 14{,}75 \cdot 6{,}6 = 97{,}35;$$
$$J = 0{,}15\,(27{,}9 + 21 + 97{,}35) = 21{,}938 \text{ cbm}.$$

Die Belastung ist somit $= 21{,}938 - 1{,}5 = 20{,}438$ t.

11. Ein Gefäß aus Blech soll 250 l fassen und die Form eines abgestumpften Kreiskegels besitzen. Die Tiefe, der Durchmesser des Bodens und die obere Weite des

Gefäßes sollen sich verhalten wie 7 : 6 : 10. Welches sind die Abmessungen des Gefäßes?

Auflösung: Die Tiefe des Gefäßes sei $7x$ dm, die Radien der beiden Grundkreise $3x$ dm und $5x$ dm, dann ist:

$$G = 9x^2\pi\,, \quad G_1 = 25x^2\pi\,; \quad 4M = 64x^2\pi\,;$$

$$J = \frac{7x}{6} 98x^2\pi = 250\,; \quad x = \sqrt[3]{\frac{750}{343\pi}} = 0{,}887\,.$$

Die Radien der Abwickelungsfigur des Mantels sind:

$$1{,}5x\sqrt{53} \quad \text{und} \quad 2{,}5x\sqrt{53}$$

d r zu ihr gehörige Zentriwinkel $\alpha = 720 : \sqrt{53} = 99^0$.

12. Eine Kugel von Holz (spezifisches Gewicht 0,8) hat einen Durchmesser von 25 cm. Welches ist das Gewicht G und die Oberfläche O der Kugel?

$$G = \frac{1{,}25^3\pi \cdot 4 \cdot 0{,}8}{3}\,\text{kg} \cdot O = 25^2\pi\,\text{qcm.}$$

13. Eine Kugel von Holz (spezifisches Gewicht 0,9) wiegt 4 kg. Wie groß ist ihr Durchmesser und ihre Oberfläche? ($J = 4 : 0{,}9 = 4{,}444$ cdm; $d = 2{,}04$ dm, $O = 13{,}07$ qdm.)

14. Eine Kugel hat einen Durchmesser von 15 cm und wiegt 2,5 kg. Welches ist ihr spezifisches Gewicht und ihre Oberfläche? ($1{,}5^3\pi s : 6 = 2{,}5$; $s = 1{,}415$; $O = 707$ qcm.)

15. Eine Kugel von Holz mit dem Durchmesser 20 cm sinkt bis zu $^4/_5$ ihres Durchmessers im Wasser ein. Wie groß ist das spezifisches Gewicht s, das Gewicht G_w und die benetzte Oberfläche O der Kugel?

Auflösung: Für den unter dem Wasser sich befindenden Kugelteil ist:

$$G = 0\,, \quad G_1 = 64\pi\,; \quad 4M = 384\pi\,; \quad h = 16\,;$$

folglich ist:

$$G_w = \frac{16 \cdot 448\pi \cdot 1}{6} = \frac{3584\pi}{3} \text{ g.}$$

Weiter ist:

$$\frac{4 \cdot 10^3\pi}{3} s = \frac{3584\pi}{3}; \quad s = 0{,}896\,.$$

$$O = 20\pi \cdot 16 = 320\pi \text{ qcm.}$$

16. Welches ist der Inhalt einer Hohlkugel mit dem äußeren Durchmesser 24 cm und der Wandstärke 1 cm?

17. Eine Hohlkugel aus Messing (spezifisches Gewicht 8,5) hat einen Durchmesser von 16 cm und sinkt im Wasser 10 cm tief unter. Welches ist ihre Wandstärke?

Auflösung: Für die verdrängte Wassermasse ist:

$$h = 10\,; \quad G = 0\,; \quad G_1 = 60\pi\,; \quad 4M = 220\pi\,,$$

das Gewicht G_w der ganzen Kugel ist somit:

$$G_w = \frac{10 \cdot 280\pi \cdot 1}{6} = \frac{1400\pi}{3} \text{ g.}$$

Ist der innere Radius der Hohlkugel x cm, dann wird x erhalten aus der Gleichung:

$$\frac{4\pi}{3}(8^3 - x^3)\,8{,}5 = \frac{1400\pi}{3}; \quad x = \sqrt[3]{470{,}824} = 7{,}779 \text{ cm.}$$

Die Wandstärke ist somit 0,221 cm.

18. Eine Hohlkugel mit dem spezifischen Gewicht 7,5 soll gerade noch im Wasser schwimmen; Wanddicke 1 cm. Wie groß Radius x?

$$\tfrac{4}{3}\pi\,[x^3 - (x-1)^3]\,7{,}5 = \tfrac{4}{3}x^3\pi \cdot 1 \quad \text{oder}$$

$$1 - \left(\frac{x-1}{x}\right)^3 = \frac{1}{7{,}5}; \quad \left(\frac{x-1}{x}\right)^3 = \frac{6{,}5}{7{,}5}; \quad x = 21{,}41 \text{ cm.}$$

19. Bei einer Kugel mit dem Radius 10 cm den 8 cm hohen Kugelabschnitt zu berechnen.

Lösung: Für J ist: $G = (10^2 - 2^2)\,\pi\,, \quad G_1 = 0;$

$4M = 4(10^2 - 6^2)\pi; \quad J = 8 \cdot 352\pi : 6 = 1474{,}4$ ccm
oder

$$J = 2 \cdot 10\pi \cdot 8 \cdot 10 : 3 - 96\pi \cdot 2 : 3 = 1408\pi : 3;$$
$$M = 2 \cdot 10\pi \cdot 8 = 160\pi = 502{,}65 \text{ qcm};$$
$$O = 160\pi + 96\pi = 256\pi = 804{,}25 \text{ qcm}.$$

20. Der Radius des Grundkreises eines 8 cm hohen Kugelabschnittes mißt 12 cm. Gesucht J, krumme Oberfläche M, Gesamtoberfläche O und Radius r der Kugel.

$$J = \frac{\pi \cdot 8(3 \cdot 12^2 + 8^2)}{6} = \frac{1984\pi}{3} \text{ ccm};$$
$$M = (8^2 + 12^2)\pi = 208\pi \text{ qcm};$$
$$O = 208\pi + 144\pi = 352\pi \text{ qcm};$$
$$8(2r - 8) = 12^2; \quad r = 13 \text{ cm}.$$

21. Zwei Parallelkreise einer Kugel ($r = 25$ cm) liegen auf derselben Seite vom Mittelpunkt aus und haben von diesem die Entfernungen 3 cm und 15 cm. J, M, O zu berechnen.

$$J = 2(616\pi + 400\pi + 2176\pi) = 6384\pi \text{ ccm};$$
$$M = 2 \cdot 25\pi \cdot 12 = 600 \text{ qcm};$$
$$O = 600\pi + 616\pi + 400\pi = 1616\pi \text{ qcm}.$$

22. Bei einer 14 cm hohen Kugelzone messen die Radien der Grundkreise 8 cm und 6 cm. J, M, O, r zu berechnen.

Lösung:

$$J = \pi \cdot 14(3 \cdot 8^2 + 3 \cdot 6^2 + 14^2) : 6 = 3472\pi : 3 \text{ ccm}.$$

Bezeichnet man den Abstand des größeren Grundkreises vom Mittelpunkt mit x, so ist:

$$8^2 + x^2 = (14 - x)^2 + 6^2; \quad x = 6 \text{ cm};$$
$$r^2 = 8^2 + 6^2 = 100; \quad r = 10 \text{ cm};$$
$$M = 2 \cdot 10\pi \cdot 14 = 280\pi \text{ qcm};$$
$$O = 280\pi + 8^2\pi + 6^2\pi = 380\pi \text{ qcm}.$$

23. Eine Kugel mit dem Radius 10 cm ist zylindrisch ausgebohrt, so daß die Achse des Zylinders durch den

Mittelpunkt der Kugel geht. Die lichte Weite der Ausbohrung sei gleich 12 cm. Wie groß ist der Inhalt J und die Oberfläche O des Körpers?

$$J = 16 \cdot 4 \cdot 64\pi : 6 = 2048\pi : 3 \text{ ccm};$$

$$O = 2 \cdot 10\pi \cdot 16 + 2 \cdot 6\pi \cdot 16 = 512\pi \text{ qcm}.$$

24. Auf einer Kugel mit dem Radius 50 cm liegt ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln 60°, 80°, 100°. Wie groß ist seine Fläche F?

Auflösung: $F = \dfrac{4 \cdot 50^2\pi \cdot 60}{720} = \dfrac{2500\pi}{3} = 2618$ qcm.

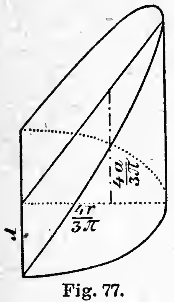


Fig. 77.

25. Von einem senkrechten Kreiszylinder mit dem Radius r ist durch eine Ebene, die durch einen Durchmesser des Grundkreises geht, ein Huf von der Höhe a abgeschnitten. Den Inhalt J, den Mantel M und die Oberfläche O zu berechnen (Figur 77).

Lösung: Für J gilt die Prismatoidformel:

$$G = 0\,, \quad G_1 = 0\,; \quad 4\,M = 4\,ra : 2\,;$$

$$J = \frac{2\,r \cdot 4\,ra}{6 \cdot 2} = \frac{2\,r^2 a}{3}\,.$$

Für die Berechnung von M zerlege man den Körper durch Ebenen, welche senkrecht zum Grundkreis sind und durch seinen Mittelpunkt gehen, in sehr viele (unendlich viele) sehr kleine Pyramiden mit den Grundflächen f und der Höhe r. Es ist dann:

$$\Sigma \frac{f \cdot r}{3} = J; \quad \frac{r}{3}\Sigma f = J; \quad \Sigma f = M; \quad M = \frac{3\,J}{r} = 2\,ar\,.$$

Weiter ist $O = 2\,ar + \dfrac{r^2\pi}{2} + \dfrac{r\sqrt{a^2 + r^2}}{2}\pi\,.$

26. Elliptischer Huf. Tritt an die Stelle des Halb-

kreises der Aufgabe 25 eine Ellipse mit den Achsen $2c$ und $2r$, so ist $J = \frac{2acr}{3}$. Ferner ist angenähert $M = \frac{2a(2r + c)}{3}$.

27. Gegeben sei ein beliebiges Vieleck mit dem Inhalt F. Man errichte auf ihm in einem beliebigen Punkt nach beiden Seiten hin die Lote je gleich h. Ferner verbinde man den Punkt mit allen Ecken des Vielecks und konstruiere aus den Verbindungsstrecken als Halbachsen und aus $2h$ als Achsen halbe Ellipsen. Man denke sich alle Ellipsen durch eine beliebige Ebene parallel dem Vieleck geschnitten; die Schnittpunkte bestimmen dann ein Vieleck, welches dem gegebenen Vieleck ähnlich ist, und die Seiten aller Vielecke sind die Mantellinien von Zylinderflächen, welche den zu berechnenden Körper begrenzen.

Für den Körper gilt die Prismatoidformel, und es ist

$$J = 4F \cdot 2h : 6 = 4Fh : 3.$$

Für ein sogenanntes Klostergewölbe kommt nur die Hälfte des Körpers in Betracht; sein Inhalt ist somit $2Fh : 3$, wo F den Grundriß bedeutet. Für die Berechnung der krummen Oberfläche M kommen die Resultate von Nr. 25 und 26 zur Geltung. Ist der Grundriß ein Quadrat mit der Seite a und $2h = a$, so ist $M = 2F$. Ist der Grundriß einem Kreis umbeschrieben und ist h gleich dem Radius dieses Kreises, so ist $M = 2F$ (vgl. Kugel).

Ist der Grundriß ein Rechteck mit den Seiten a und b, so ist angenähert $M = \frac{2}{3}[2h(a + b) + ab]$.

28. Das Kreuzgewölbe. Es entsteht aus einer Anzahl von Zylindern, bei welchen jede Grundfläche der vierte Teil einer Ellipse mit den Halbachsen a und h ist. h hat für alle Ellipsen denselben Wert, während a und die Höhe l der Zylinder verschieden sind. Von jedem

Zylinder aber ist noch die Hälfte eines Zylinderhufes abzuziehen.

Der Inhalt J ist dann:

$$J = \Sigma\left(\frac{ahl\pi}{4} - \frac{ahl}{3}\right) = 0{,}9\,h\,\Sigma\frac{al}{2} = 0{,}9\,Fh\,,$$

wo F den Inhalt des Grundrisses bedeutet.

Ist der Grundriß ein Rechteck mit den Seiten a und b, so ist der Mantel M angenähert:

$$M = \frac{\pi}{2}(ab + ah + bh) - \tfrac{2}{3}(ab + 2ah + 2bh)\,.$$

Ist $a = b = 2h$, so ist genau: $M = a^2\pi - 2a^2 = a^2 \cdot 1{,}1416$.

d) Anwendungen der Guldinschen Regel.

1. Ein Kreis mit dem Radius r dreht sich um eine in seiner Ebene liegenden Geraden, während der Abstand seines Mittelpunktes von der Achse gleich a ist $(a > r)$. Wie groß ist der Inhalt J und die Oberfläche O des erzeugten Umdrehungskörpers?

Antwort: $J = r^2\pi \cdot 2a\pi = 2ar^2\pi^2$;
$O = 2r\pi \cdot 2a\pi = 3ar\pi^2$.

2. Den Inhalt und die Oberfläche einer schraubenförmigen Röhre zu bestimmen.

Auflösung: Hat ein Schraubengang die Länge l, so ist für ihn der hohle Raum $= r^2\pi l$, die innere Fläche $M = 2r\pi l$. Die massive Röhre hat den Inhalt $(R^2 - r^2)\pi l$ und die Oberfläche: $(R + r)2\pi l + 2(R^2 - r^2)\pi$.

3. Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes zu bestimmen.

Anleitung: Man lasse den Ausschnitt um die Achse rotieren, die durch seinen Mittelpunkt geht und parallel seiner Sehne ist. Bezeichnet man dann den Bogen des

Sektors mit b, seine Sehne mit s, seinen Radius mit r und den Abstand des gesuchten Schwerpunktes von der Achse mit x, so erhält man unter Anwendung der Prismatoidformel und der Guldinschen Regel auf den entstehenden Umdrehungskörper:

$$\frac{br}{2} \cdot 2x\pi = \frac{4r^2\pi}{6}; \quad x = \frac{2rs}{3b}.$$

4. Den Schwerpunkt des Bogens eines Kreissektors zu bestimmen.

Man verfährt ähnlich wie in Aufgabe 3 und erhält:

$$b \cdot 2x\pi = 2r\pi s; \quad x = rs : b.$$

5. Den Schwerpunkt des Kreisabschnittes der Aufgabe 3 zu bestimmen, wenn d der Abstand der Sehne vom Mittelpunkt ist.

Hier ist $\dfrac{br - ds}{2} \cdot 2x\pi = \dfrac{4(r^2 - d^2)\pi s}{6}$;

$$x = \frac{2(r^2 - d^2)s}{3(br - ds)}.$$

6. Den Schwerpunkt einer halben Ellipse mit den Halbachsen a und b zu bestimmen.

Auflösung: Für die Prismatoidformel ist:

$$G = 0, \quad G_1 = 0; \quad 4M = 4b^2\pi; \quad h = 2a; \quad J = \frac{4ab^2\pi}{3},$$

wenn man die Ellipse um die Achse a dreht. Die Guldinsche Regel ergibt:

$$J = \frac{ab\pi \cdot 2x\pi}{2} = \frac{4ab^2\pi}{3}; \quad x = \frac{4b}{3\pi}.$$

Hieraus geht zugleich hervor, daß die Abstände des Schwerpunktes einer Viertelellipse von den Achsen a und b bzw. $\dfrac{4b}{3\pi}$ und $\dfrac{4a}{3\pi}$ sind.

e) Verschiedene Aufgaben.

1. Ein Würfel wird zu einer möglichst großen Kugel abgedreht. Die Drehspäne wiegen 4,094 kg (spezifisches Gewicht 8,5). Wie groß ist die Kante des Würfels und das Gewicht der Kugel? $(6x^3 - x^3\pi)\,8{,}5 = 4094 \cdot 6$.

2. Ein zylindrisches Gefäß aus Holz hat den äußeren Durchmesser von 20 cm, den inneren von 19 cm, eine Bodenstärke von 0,5 cm und wiegt 0,464 kg. Wieviel Wasser muß ins Innere gegossen werden, damit, wenn es schwimmt, der äußere und der innere Wasserspiegel gleich hoch stehen? $9{,}5^2\pi x \cdot 1 + 464 = 10^2\pi(x + 0{,}5)\,1$; $x = 10$ cm.

3. Bei einem senkrechten Kreiszylinder ist der Inhalt J gegeben. Seine Abmessungen zu berechnen, wenn seine Oberfläche O einen kleinsten Wert, ein Minimum, haben soll. $(h = 2r)$

4. Dieselbe Aufgabe, es soll aber $M + r^2\pi$ ein Minimum sein. $(r = h)$

5. Dieselbe Aufgabe; gegeben ist aber O, und J soll ein Maximum werden (einen größten Wert erhalten). $(h = 2r)$

6. Dieselbe Aufgabe, wenn $M + r^2\pi$ gegeben ist und J ein Maximum werden soll. $(r = h)$

7. Bei einem schief abgeschnittenen Kreiszylinder mit dem Radius 6 cm sind die beiden schiefen Flächen gegen die Achse = 16 cm unter 45^0 und 60^0 geneigt. Wie groß ist der Inhalt J, der Mantel M und die Oberfläche O des Körpers? $J = 6^2\pi \cdot 16$; $M = 2 \cdot 6\pi \cdot 16$;

$$O = M + 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \pi + 6 \cdot 12\pi\,.$$

8. Den abgestumpften senkrechten Kreiskegel zu berechnen, bei dem $r_1 : r_2 : h = 8 : 3 : 12$ und $M = 1797$ qcm ist.

9. Ebenso, wenn $r_1 : r_2 : m = 4 : 1 : 5$ und $O = 2906$ qcm ist.

10. Ebenso, wenn $r_1 = 4\,m$, $h = 4{,}8$ m und $J = 1859{,}8$ cbm ist.

11. Auf einem senkrechten Kreiszylinder sitzt eine Halbkugel deren Radius gleich dem des Zylinders ist. Der ganze Körper ist 10 cm hoch, wiegt 1832 g (spezifisches Gewicht 7,2); denselben zu berechnen. (Gleichung dritten Grades durch Probieren zu lösen; $x \backsim 3$ cm.)

12. Bei einem 1,5 m hohen Prismatoid, dessen Grundflächen Rechtecke mit parallen Seiten sind, haben die Seitenflächen gegen die Grundflächen gleiche Neigungen. Die Seiten des einen Rechtecks messen 12 und 6 m, eine Seite des anderen 8 m (parallel zur Seite **12** m). Den Körper zu berechnen.

13. Eine Kugel mit dem Radius r und dem spezifischen Gewicht s ($s < 1$) schwimmt im Wasser. Bis zu welcher Tiefe x sinkt sie ein?

$$x = r\left[1 + \sqrt[3]{1 - 2s + 2\sqrt{s(s-1)}} + \sqrt[3]{1 - 2s - 2\sqrt{s(s-1)}}\right]$$

$= r(1 + 2\cos\varphi)$, wenn $1 - 2s = \cos 3\varphi$ ist; welche von den drei Wurzeln ist zu nehmen? ($180^0 < 3\varphi < 360^0$.)

14. Quadratische Hängekuppel. Dem Grundkreis einer Halbkugel mit dem Radius r ist ein Quadrat einbeschrieben; durch die Quadratseiten a sind Ebenen senkrecht zum Grundkreis gelegt, die vier halbe Kugelabschnitte abschneiden. Berechnung des übrigbleibenden Teiles.

$$J = a^3(5 - \sqrt{8})\pi\,; \quad M = a^2\pi(\sqrt{2} - 1)\,;$$
$$O = M + 0{,}5a^2\pi + a^2\,.$$

15. Rechteckige Hängekuppel. An Stelle des Quadrates der Aufgabe 14 tritt ein Rechteck mit den Seiten a und b.

$$J = \pi[3a^2b + 3ab^2 + 2a^3 + 2b^3 - 16r^3] : 24\,;$$
$$M = \pi(a^2 + b^2)\left(a + b - \sqrt{a^2 + b^2}\right) : 2\sqrt{a^2 + b^2}\,;$$
$$O = M + (a^2 + b^2)\pi : 4 + ab\,.$$

16. Ein unregelmäßig gestalteter Körper ($s > 1$) wird in zylindrisches Gefäß mit Wasser ($r = 5$ cm, $h = 20$ cm) vollständig untergetaucht; das Wasser steigt um 4 cm.

Wie groß ist sein Kubikinhalt? Wieviel Gold ($s = 19$) und Silber ($s = 10{,}5$) enthält der Körper, wenn er 4997 g wiegt?

17. Auf einem senkrechten Kreiszylinder sitzt ein senkrechter Kreiskegel. Die Radien der Grundkreise seien gleich r und die Höhen bzw. gleich h und H. Den Schwerpunkt des Körpers zu berechnen. Abstand von dem Grundkreis $= (6h^2 + H^2 + 4hH) : 4(H + 3h)$.

18. Auf einem senkrechten Kreiszylinder sitzt eine Halbkugel derart, daß die Körper den einen Grundkreis gemeinschaftlich haben. Den Abstand des Schwerpunktes von dem anderen Grundkreis zu bestimmen.

$$(6h^2 + 8hr + 3r^2) : 4(3h + 2r).$$

19. Zwei Seiten eines Parallelogramms mit der Länge a und der zugehörigen Höhe h stehen auf einer Achse senkrecht; die Ecken, welche der Achse am nächsten liegen, haben von dieser die Entfernungen b und c. Den für diese Achse erzeugten Umdrehungskörper zu berechnen.

$$J = ah(a + b + c)\pi.$$

20. Die Schenkel eines überall 1 cm starken Winkeleisenprofils messen 8 cm und 12 cm. Die Abstände x und y des Schwerpunktes von den Seiten 8 cm und 12 cm zu bestimmen.

$$(12 \cdot 1 + 7 \cdot 1)\, 2x\pi = 12 \cdot 6 \cdot 2\pi + 7 \cdot 0{,}5 \cdot 2\pi;$$
$$(12 + 7)\, 2y\pi = 12 \cdot 0{,}5 \cdot 2\pi + 7 \cdot 4{,}5 \cdot 2\pi;$$
$$19x = 75{,}5; \quad 19y = 37{,}5.$$

21. Aus einem Rechteck mit den Seiten 10 cm und 6 cm ist ein Kreis mit dem Radius 1,2 ausgeschnitten; der Mittelpunkt hat von der Seite 10 cm die Entfernung 3 cm und von der Seite 6 cm die Entfernung 2,2 cm. Den Flächenschwerpunkt der Figur zu bestimmen. Die Entfernung x von der Seite 6 cm ist bestimmt durch:

$$(6 \cdot 10 - 1{,}2^2\pi)\, 2x\pi = 6 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 5\pi - 1{,}2^2\pi \cdot 2 \cdot 2{,}2\pi.$$

22. Gleichung der Ellipse aus Figur 52, Seite 78. In Figur 78 ist die Symmetrieebene des Gebildes, das durch Figur 52 dargestellt ist, gezeichnet. Ist die große Achse der Ellipse gleich $2a$, die kleine gleich $2b$, so ist, wenn das in X auf der Ebene errichtete Lot mit $2y$ und AX mit x bezeichnet wird:

$$y^2 = pq; \quad p:(a+x) = b:a; \quad q:(a-x) = b:a;$$

$$pq = (a^2 - x^2)b^2 : a^2; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

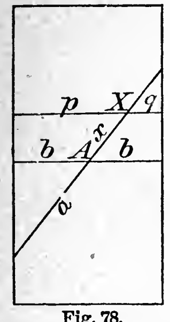


Fig. 78.

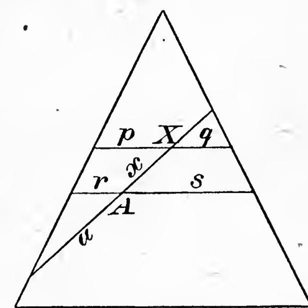


Fig. 79.

23. Gleichung der Ellipse aus Figur 53 und 79.

$$p:(a+x) = r:a; \quad q:(a-x) = s:a; \quad y^2 = pq;$$

$$rs = b^2; \quad y^2 = (a^2 - x^2)rs : a^2; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

24. Gleichung der Hyperbel aus Figur 54 und 80.

$$p:(a+x) = r:a; \quad q:(x-a) = s:a; \quad rs : b^2;$$

$$y^2 = pq; \quad y^2 = (x^2 - a^2)rs : a^2; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

25. Gleichung der Parabel aus Figur 55 und 81.

Bezeichnet man $AF = AC = AE$ mit $\frac{p}{2}$, AX mit x, GA mit a, SG mit b, so ist:

$y^2 = aq$; $x : q = b : a$; $\frac{a^2}{4} = \frac{bp}{2}$; $y^2 = \frac{a^2x}{b}$;
$y^2 = 2px$.

26. Inhalt J des Parabelsegmentes mit der Sehne s und der Pfeilhöhe h. Zieht man Parallelen zur Hauptachse der Parabel, so ist ihre Länge gleich $h - x = h - \frac{y^2}{2p}$. Zur Bestimmung von J läßt sich somit die Simpsonsche Regel anwenden: $G = G_1 = 0$; $4M = 4h$;

$$J = 4hs : 6 = 2hs : 3.$$

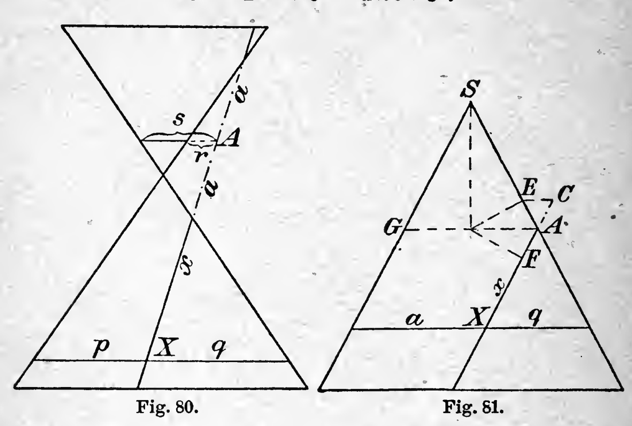


Fig. 80. Fig. 81.

27. Inhalt K des parabolischen Zylinders, wenn die Grundfläche ein Parabelsegment mit der Sehne s und der Pfeilhöhe h ist. Höhe des Zylinders gleich H. ($K = 2hHs : 3$.)

28. Inhalt K des schief abgeschnittenen parabolischen Zylinders, wenn die schiefe Ebene durch die Hauptachse einer Grundfläche geht. Die Schnitte senkrecht zur Hauptachse sind ähnliche rechtwinklige Dreiecke, für welche $Q = cy^2$, $y^2 = 2px$, $Q = 2cpx$ ist. Für K gilt somit die

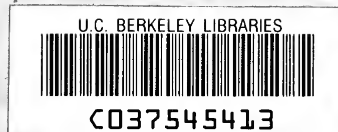
Prismatoidformel: $G = 0$; $G_1 = 2cph$; $4M = 4cph$; $K = 6cph^2 : 6 = G_1 h : 2$.

29. Beliebiges parabolisches Klostergewölbe mit der Höhe h und dem Grundriß G. Es ist hier $K = Gh : 2$.

30. Inhalt K des Umdrehungsparaboloids. Es entsteht durch Drehung einer Parabel um ihre Hauptachse. Ist der Radius des Grundkreises r und h die Höhe des Körpers, so ist $K = r^2 \pi h : 2$.

Für den Abstand x des Schwerpunktes der erzeugenden Parabelfläche ist somit: $\frac{2}{3} rh \cdot 2x\pi = r^2 \pi h : 2$; $x = \frac{3}{8} r$.




U.C. BERKELEY LIBRARIES
C037545413

